

1. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Точка M — середина ребра BC , точка L — середина ребра AB .

а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой CL и содержащая прямую DM , делит ребро AB в отношении $3 : 1$, считая от вершины A .

б) Найдите угол между прямыми DM и CL .

2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 проходит через середину ребра BC .

б) Найдите угол между прямыми CA_1 и AB_1 .

4. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AC_1 и параллельная прямой CB_1 проходит через середину ребра A_1B_1 .

б) Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

5. В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие ребра DC и AB , перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB , и параллельно DC и AB . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

6. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что угол между прямыми BE и AD равен углу CBE .

б) Найдите угол между прямыми BE и AD .

7. На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$.

а) Пусть точка F делит ребро BB_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины B_1 . Докажите, что угол между прямыми BE и AC_1 равен углу $AC_1 F$.

б) Найдите угол между прямыми BE и AC_1 .

8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 6, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{1}{9}$. Точка M — середина ребра SC , точка N — середина ребра AC .

а) Докажите, что угол между прямыми BM и SA либо равен углу BMN , либо дополняет его до 180° .

б) Найдите косинус угла между прямыми BM и SA .

9. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведена высота DH . K — середина отрезка CH . BM — медиана боковой грани BCD .

а) Докажите, что угол между DH и BM равен углу BMK .

б) Найдите угол между DH и BM .

10. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$.

а) Докажите, что угол между прямыми SB и CD равен углу SBE .

б) Если стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD .

11. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ проведена высота PH . N — середина отрезка AH , M — середина ребра AP .

а) Докажите, что угол между прямыми PH и BM равен углу BMN .

б) Длины всех рёбер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM .

12. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра которой равны 1.

а) Докажите, что $AC_1 \perp BE$.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1 .

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

14. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка H — центр грани ABC , а точка M — середина ребра CD .

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми DH и BM .

15. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что $AD : BC = 2 : 1$ и $AB = BC$.

а) Докажите, что прямые DB_1 и $A_1 B_1$ перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми CD_1 и DB_1 , если боковая грань $AA_1 D_1 D$ — квадрат.

16. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Высота пирамиды проходит через точку B . Точки M и N — середины рёбер AD и BC соответственно.

- Докажите, что MN является биссектрисой угла BMC .
- Найдите угол между прямыми BD и MN , если $BD = 6\sqrt{2}$, $AC = 16$.

17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S в грани SBC проведена высота SH , а в грани SEF проведена высота SK .

- Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SHK .
- Найдите угол между прямыми BE и SH , если $SA = 13$, а $BC = 10$.

18. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC . Все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

- Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости, проходящей через середину ребра AB и ребро DC .
- Найдите расстояние между прямыми AB и CD , если $AB = 6\sqrt{3}$, $AD = 5\sqrt{3}$.

19. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $BC = 5$ и $AB = AA_1 = 8$, M и N — середины рёбер CD и AA_1 соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N и параллельна прямой CD_1 .

- Докажите, что прямая DN параллельна плоскости α .
- Найдите расстояние между прямыми C_1D и BD_1 .

20. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро $SA = 5$, а высота $SO = \sqrt{15}$. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно. Точка N — вершина пирамиды $NSCD$, NT — её высота.

- Докажите, что точка T делит SM пополам.
- Найдите расстояние между прямыми NT и SC .

21. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены середины P и E отрезков AB и AD соответственно.

- Докажите, что прямые B_1E и CP перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1E = 5\sqrt{5}$?

22. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = \sqrt{23}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{15}$, $SB = \sqrt{85}$ и $SD = \sqrt{83}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

23. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = \sqrt{14}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 4\sqrt{3}$, $SB = 2\sqrt{21}$ и $SD = \sqrt{62}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

24. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точка K лежит на ребре SC и делит его в отношении $1 : 3$, считая от вершины. Точка M — середина AS . Через MK проведено сечение, параллельное прямой DC .

- Докажите, что сечение является равнобедренной трапецией.
- Найдите угол между прямыми MK и DC , если $SA = AB = 16$.

25. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали пересекаются в точке O . Точки M и N — середины рёбер AB и BC соответственно.

- Докажите, что плоскость α , проходящая через точку O параллельно прямым B_1M и C_1N , делит ребро BB_1 в отношении $1 : 1$.
- Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α , если $AB = 6$, $BC = 4$ и $AA_1 = 3$.

26. Дана пирамида $SABC$, в которой $AB = AC = SB = SC = 17$ и $BC = SA = 16$. Точки M и N — середины рёбер BC и SA .

- Докажите, что отрезок MN является общим перпендикуляром к прямым BC и SA .
- Найдите объём пирамиды $ABMN$.

27. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 12$, а высота равна 3. На ребрах AB , CD , AS отмечены точки E , F и K соответственно, причем $AE = DF = 4$ и $AK = 3$.

- Докажите, что плоскости KEF и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .