1. а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что все грани тетраэдра ACB_1D_1 — равные треугольники (тетраэдр, обладающий таким свойством, называют *равногранным*).

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8, AB = 6, BC = 15$.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 21\sqrt{3},\ SC = 29$. Точки M и N — середины рёбер AS и BC соответственно.

а) Докажите что отрезок MN делится пополам высотой пирамиды, проведенной из вершины S.

б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN.

3. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC = 5$ и $BC = 8$. Высота призмы равна 3.

а) Докажите, что треугольник A_1BC остроугольный.

б) Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

4. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11},\ SB = 3\sqrt{3},\ SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

5. а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что все грани тетраэдра ACB_1D_1 — равные треугольники (тетраэдр, обладающий таким свойством, называют *равногранным*).

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}, SC = 25$. M — середина ребра SA.

а) Докажите, что проекции точек S и M на плоскость основания делят высоту AN треугольника ABC на три равные части.

б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN.

7. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5, BC = 8$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что плоскость BA_1M перпендикулярна плоскости BCC_1.

б) Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB = 2, AD = AA_1 = 1$.

а) Пусть B_1E — высота треугольника BB_1C_1. Докажите, что AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1.

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

9. а) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина пирамиды, прямая SC перпендикулярна прямой AB.

б) Пусть высота SO составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что AC' перпендикулярна прямой BE.

б) Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD'.

11. В правильном тетраэдре $ABCD$ M — середина ребра AD.

а) Докажите, что проекция точки M на плоскость BCD делит высоту DN треугольника BCD в отношении 1 : 2, считая от вершины D.

б) Найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

12. Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Точка M — середина бокового ребра пирамиды AP.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки B и M и перпендикулярная плоскости BDP, делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка M — середина ребра BC.

а) Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1.

14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD.

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой AC.

15. Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = \sqrt{17},\ AB = AC = \sqrt{29},\ SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC.

16. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC, если $AB = 12$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.

17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра A_1C_1, а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB, лежит на отрезке OC_1.

б) Найдите угол между прямой OC_1, и плоскостью AMB.

18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 6\sqrt{3}$. На ребре BC отмечена точка M так, что $BC : MC = 3 : 1$, а на ребре AC отмечена точка N так, что $AN : NC = 2 : 1$. Точка K — середина ребра AB, точка O — центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

а) Докажите, что прямая OK параллельна плоскости MNC_1.

б) Найти угол между прямой OK и плоскостью основания, если площадь треугольника MNC_1 равна $6\sqrt{3}$.

19. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — центр грани ABD, точка M — центр грани ACD.

а) Докажите, что прямые BC и KM параллельны.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABD.

20. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1.

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B, а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

21. Точка M середина ребра AB правильного тетраэдра $DABC$.

а) Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD.

б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD.

22. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 8, а угол при вершине A равен 60°. Известно, что $SA = 15$, $SC = \sqrt{33}$ и, кроме того, $SB = SD$.

а) Докажите, что SC — высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью ASC и ребром SB.

23. На ребрах BS и CS правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания $AD = 10$ и боковым ребром $SA = 5\sqrt{6}$ взяты точки K и M соответственно так, что $SK : BK = CM : SM = 3 : 2$.

а) Докажите, что прямые KM и SC взаимно перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью основания пирамиды.

24. Точка O — точка пересечения диагоналей грани CDD_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость DA_1C_1 пересекает диагональ BD_1 в точке F.

а) Докажите, что $BF : FD_1 = A_1F : FO$.

б) Точки M и N — середины ребер AB и AA_1, соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью DA_1C_1.

25. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно 4. Через точку A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой DC_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении 1 : 3, считая от точки D.

б) Найдите угол между прямой F_1D и плоскостью α.

26. Точка O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сечения параллелепипеда плоскостями AOB и BOC являются прямоугольниками, стороны AB и BC этих сечений в 3 раза меньше соответственных больших сторон сечений.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BOC.

27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны углы: $\angle C_1AA_1 = \alpha$, $\angle C_1AB = \beta$, $\angle C_1AD = \gamma$.

а) Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$, если $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$.

28. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 9$, $AC = 12$ и $AA_1 = 3$.

29. В правильном тетраэдре $ABCD$ все рёбра равны 6. На рёбрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AK = 4$.

а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как 5 : 4.

б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью CMK.