

1. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60° .

а) Докажите, что угол BA_1C_1 больше угла BAC .

б) Расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 равно 5, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно 8. Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C .

2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

а) Докажите, что точка T является серединой SM .

б) Найдите расстояние между NT и SC .

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию между прямой AA_1 и плоскостью BCC_1 .

б) Найдите это расстояние.

4. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

5. Расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 5, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно 8. Двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60° .

а) Докажите, что расстояние между боковыми ребрами BB_1 и CC_1 равно 7.

б) Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро PA — $12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K .

а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении $2 : 1$, считая от вершины P .

б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK .

7. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми A_1B и AM равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую A_1B .

б) Найдите это расстояние.

8. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

9. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми A_1B и AM равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую A_1B .

б) Найдите это расстояние.

10. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку C отмечена точка N так, что $B_1C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и MN .

11. Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .

б) Найдите расстояние между ребрами BC и SA .

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1 .

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро $SA = 6$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 2 : 7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $2 : 7$, считая от вершины S .

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

14. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1.

а) Докажите, что $CM \perp AB$.

б) Найдите расстояние между прямыми AL и MO , где L — середина ребра MC , O — центр грани ABC .

15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро $SA = 8$. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $1 : 3$, считая от вершины A .

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KN .

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2.
- Докажите, что плоскости $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$ параллельны.
 - Найдите расстояние между плоскостями $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$.
17. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $AA_1 = 5$, $AD = 3$.
- Докажите, что прямые $A_1 B$ и $B_1 D$ перпендикулярны.
 - Найдите расстояние между прямыми $A_1 B$ и $B_1 D$.
18. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O_1 — центр квадрата $ABCD$, точка O_2 — центр квадрата $CC_1 D_1 D$.
- Докажите, что прямые $A_1 O_1$ и $B_1 O_2$ скрещиваются.
 - Найдите расстояние между прямыми $A_1 O_1$ и $B_1 O_2$, если ребро куба равно 1.
19. В правильном тетраэдре $MNPQ$ через биссектрисы NA и QB граней MNP и QNP проведены параллельные плоскости.
- Найдите отношение суммы объемов отсекаемых от $MNPQ$ тетраэдров к объему $MNPQ$.
 - Найдите расстояние между NA и QB , если ребро тетраэдра равно 1.
20. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$.
- Найдите угол между прямыми BC и KE .
 - Найдите расстояние между прямыми BC и KE , если ребро тетраэдра равно $\sqrt{6}$.
21. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1.
- Докажите, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1 .
 - Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1 .
22. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 15$ и $BC = 25$. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На ребрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK = CN = 8$. Через точки K и N проведена плоскость α , перпендикулярная ребру SB .
- Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB .
 - Найдите расстояние между прямыми SD и KM .
23. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра $B_1 C_1$, точка N лежит на ребре AC , причем $AN : NC = 15 : 1$. Катет AC в четыре раза больше бокового ребра AA_1 призмы.
- Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
 - Найдите расстояние между прямыми MN и CA_1 , если $AC = 16$, $BC = 2\sqrt{17}$.
24. Основанием пирамиды $ABCD$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна 4. Боковое ребро CD перпендикулярно плоскости основания и имеет длину $\sqrt{2}$. Пусть M — середина ребра BC , а N — середина ребра AB .
- Докажите, что угол между прямыми DM и CN равен 45° .
 - Найдите расстояние между прямыми DM и CN .
25. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ — треугольник ABC , в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60° . На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 1 : 2$. Расстояние между прямыми AB и $B_1 C_1$ равно $18\sqrt{3}$.
- Докажите, что основания высот треугольников ABC и PBC , проведенных к стороне BC , совпадают.
 - Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP .
26. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{2}$. На ребре BB_1 выбрана точка K так, что $BK : B_1 K = 2 : 3$. Угол между плоскостями ABC и AKC равен 45° .
- Докажите, что расстояние между прямыми AB и $A_1 C_1$ равно боковому ребру призмы.
 - Найдите расстояние между прямыми AB и $A_1 C_1$, если $KC = 8$.
27. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD . На прямой $B_1 C_1$ отмечена точка E так, что C_1 — середина $B_1 E$.
- Докажите, что прямые $A_1 B_1$ и DE перпендикулярны.
 - Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.
28. Точка Q симметрична вершине S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относительно плоскости основания $ABCD$.
- Докажите, что плоскости SBC и QDA параллельны.
 - Найдите расстояние между плоскостями SBC и QDA , если сторона основания пирамиды $SABCD$ равна 2, а ее боковое ребро равно $\sqrt{2022}$.
29. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = BC = 6$, $AA_1 = 12$ точки M и K — середины AB и BC соответственно, точка N лежит на ребре BB_1 , причем $BN = 6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN .
- Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1 .
 - Найдите расстояние между плоскостями KMN и α .
30. Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0,3$.
- Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.
 - Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AC = 6$.

31. Основание $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина S расположена на оси OO_1 цилиндра (O_1 — центр верхнего основания цилиндра). Объем цилиндра равен 450π , объем пирамиды равен 50 .

а) Докажите, что $O_1S : SO = 5 : 1$.

б) Найдите расстояние между AS и CD , если диаметр основания цилиндра равен $5\sqrt{2}$.

32. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC$ и $AC = 16$. На ребре BB_1 выбрана точка F так, что $BF : B_1F = 3 : 5$. Угол между плоскостями AA_1C и AFC равен 45° .

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1 , если $FC = 10$.

33. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2 . Точки M и N — середины ребер BC и AB соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми SM и CN равен 45° .

б) Найдите расстояние между SM и CN .

34. На высоте SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ взяли точку M так, что $SM : MO = 2 : 3$. Через точку M параллельно грани ADS провели плоскость α .

а) Докажите, что расстояние от прямой BC до плоскости α относится к расстоянию между прямыми BC и AS как $4 : 5$.

б) Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α , если все ребра пирамиды равны 10 .

35. Точка M — середина ребра BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C .

б) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1 , если параллелепипед прямоугольный, $AB = 12$, $AD = 12$ и $AA_1 = 6$.

36. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10 . Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.

а) Докажите, что ребро SD перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB .

37. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 8$ и $BC = 4$.

38. Основанием треугольной призмы $ABC_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной 1 , а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани A_1B перпендикулярна плоскости основания. Точка M — середина стороны BC .

а) Докажите, что прямые AM и A_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1C и BC_1 .

39. Дан цилиндр с центрами нижнего и верхнего оснований O_1 и O_2 соответственно. Объем цилиндра, равен $\pi\sqrt{6}$. На окружности нижнего основания выбраны точки A и B , а на боковой поверхности выбрана, точка C , равноудаленная от оснований.

а) Докажите, что объем тетраэдра O_1ABC не превосходит $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

б) Найдите расстояние между прямыми AO_1 и CO_2 , если отрезки BO_2 и CO_1 пересекаются, $\angle AO_1B = 120^\circ$ и $\angle O_2CA = 90^\circ$.

40. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точки M и N середины ребер SC и AD соответственно. Плоскость α проходит через прямую BM параллельно SN .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро CD в отношении $1 : 2$.

б) Найдите расстояние от прямой SN до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна 6 , а боковое ребро равно 12 .

41. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно 9 , а высота пирамиды SO равна $3\sqrt{5}$, точки M и T — середины отрезков BC и SM соответственно.

а) Докажите, что AT — высота пирамиды, проведенная к грани SBC .

б) Найдите расстояние между прямыми AT и SB .

42. Диагонали BE и DF основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ пересекаются в точке P , а диагонали FE_1 и EF_1 боковой грани EFF_1E_1 пересекаются в точке Q .

а) Докажите, что прямая QP параллельна плоскости CB_1E_1 .

б) Найдите расстояние между прямой QP и плоскостью CB_1E_1 , если сторона основания призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равна $2\sqrt{3}$, а ее высота равна 4 .

43. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки M и N — середины сторон AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1N = 7\sqrt{2}$.

44. Через вершины A_1 и C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость α , параллельная прямой BC_1 . Сторона основания призмы равна 6 , а боковое ребро равно 2 .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB пополам.

б) Найдите расстояние от прямой BC_1 до плоскости α .

45. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC . Все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD , если $AB = 8\sqrt{3}$, $AD = 5\sqrt{3}$.

46. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Точки E и D — середины ребер BC и AB соответственно.

а) Докажите, что угол между SE и CD равен 45° .

б) Найдите расстояние между прямыми SE и CD .

47. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , $AB = BC = 2$. На боковом ребре AA_1 , равном 4, выбрана точка M такая, что угол BMC_1 — прямой.

а) Докажите, что тангенс угла между прямыми MC и BC_1 равен $\sqrt{14}$.

б) Найдите расстояние между прямыми MC и BC_1 .