

1. Дана прямая треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , двугранный угол призмы при ребре  $AA_1$  равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что угол  $BA_1C_1$  больше угла  $BAC$ .

б) Расстояние между боковыми ребрами  $AA_1$  и  $BB_1$  равно 5, а расстояние между боковыми ребрами  $AA_1$  и  $CC_1$  равно 8. Найдите расстояние от прямой  $AA_1$  до плоскости  $BC_1C$ .

2. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона  $AB$  основания равна  $2\sqrt{3}$ , а высота  $SH$  пирамиды равна 3. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $CD$  и  $AB$  соответственно, а  $NT$  — высота пирамиды  $NSCD$  с вершиной  $N$  и основанием  $SCD$ .

а) Докажите, что точка  $T$  является серединой  $SM$ .

б) Найдите расстояние между  $NT$  и  $SC$ .

3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 1.

а) Докажите, что расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$  равно расстоянию между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .

б) Найдите это расстояние.

4. Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Грань  $ACC_1A_1$  является квадратом.

а) Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $AC = 4$ ,  $BC = 7$ .

5. Расстояние между боковыми ребрами  $AA_1$  и  $BB_1$  прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равно 5, а расстояние между боковыми ребрами  $AA_1$  и  $CC_1$  равно 8. Двугранный угол призмы при ребре  $AA_1$  равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что расстояние между боковыми ребрами  $BB_1$  и  $CC_1$  равно 7.

б) Найдите расстояние от прямой  $AA_1$  до плоскости  $BC_1C$ .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $PABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна 12, боковое ребро  $PA$  —  $12\sqrt{2}$ . Через вершину  $A$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная прямой  $PC$  и пересекающая ребро  $PC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит высоту  $PH$  пирамиды  $PABCD$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $P$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $PH$  и  $BK$ .

7. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра основания которой равны  $2\sqrt{7}$ . Сечение, проходящее через боковое ребро  $AA_1$  и середину  $M$  ребра  $B_1C_1$ , является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми  $A_1B$  и  $AM$  равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую  $A_1B$ .

б) Найдите это расстояние.

8. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BC_1$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BC_1$ .

9. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро  $AA_1$  и середину  $M$  ребра  $B_1C_1$ , является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми  $A_1B$  и  $AM$  равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую  $A_1B$ .

б) Найдите это расстояние.

10. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  рёбра равны 1. На продолжении отрезка  $A_1C_1$  за точку  $C_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $A_1C_1 = C_1M$ , а на продолжении отрезка  $B_1C$  за точку  $C$  отмечена точка  $N$  так, что  $B_1C = CN$ .

а) Докажите, что  $MN = MB_1$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $B_1C_1$  и  $MN$ .

11. Дана пирамида  $SABC$ , в которой  $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$ ,  $SA = BC = 2\sqrt{5}$ .

а) Докажите, что ребро  $SA$  перпендикулярно ребру  $BC$ .

б) Найдите расстояние между ребрами  $BC$  и  $SA$ .

12. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 2. Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

а) Докажите, что прямые  $MB$  и  $B_1C$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $MB$  и  $B_1C$ .

13. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 9, а боковое ребро  $SA = 6$ . На рёбрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $K$  и  $M$  соответственно, причём  $AK : KB = SM : MC = 2 : 7$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна прямой  $SA$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $SB$  в отношении  $2 : 7$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $SA$  и  $KM$ .

14. Дан правильный тетраэдр  $MABC$  с ребром 1.

а) Докажите, что  $CM \perp AB$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AL$  и  $MO$ , где  $L$  — середина ребра  $MC$ ,  $O$  — центр грани  $ABC$ .

15. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $SA = 8$ . На рёбрах  $CD$  и  $SC$  отмечены точки  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KN$  и параллельна прямой  $BC$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AB$  в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $A$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $SA$  и  $KN$ .

16. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 2.
- Докажите, что плоскости  $A_1 B D$  и  $B_1 D_1 C$  параллельны.
  - Найдите расстояние между плоскостями  $A_1 B D$  и  $B_1 D_1 C$ .
17. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB = 5, AA_1 = 5, AD = 3$ .
- Докажите, что прямые  $A_1 B$  и  $B_1 D$  перпендикулярны.
  - Найдите расстояние между прямыми  $A_1 B$  и  $B_1 D$ .
18. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $O_1$  — центр квадрата  $ABCD$ , точка  $O_2$  — центр квадрата  $CC_1 D_1 D$ .
- Докажите, что прямые  $A_1 O_1$  и  $B_1 O_2$  скрещиваются.
  - Найдите расстояние между прямыми  $A_1 O_1$  и  $B_1 O_2$ , если ребро куба равно 1.
19. В правильном тетраэдре  $MNPQ$  через биссектрисы  $NA$  и  $QB$  граней  $MNP$  и  $QNP$  проведены параллельные плоскости.
- Найдите отношение суммы объемов отсекаемых от  $MNPQ$  тетраэдров к объему  $MNPQ$ .
  - Найдите расстояние между  $NA$  и  $QB$ , если ребро тетраэдра равно 1.
20. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $K$  — середина ребра  $AB$ , точка  $E$  лежит на ребре  $CD$  и  $EC : ED = 1 : 2$ .
- Найдите угол между прямыми  $BC$  и  $KE$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $BC$  и  $KE$ , если ребро тетраэдра равно  $\sqrt{6}$ .
21. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все ребра равны 1.
- Докажите, что точки  $F$  и  $C$  равноудалены от плоскости  $BED_1$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $ED_1$  и  $FE_1$ .
22. Основанием пирамиды  $SABCD$  является прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 15$  и  $BC = 25$ . Боковые ребра пирамиды равны  $5\sqrt{17}$ . На ребрах  $AD$  и  $BC$  отмечены соответственно точки  $K$  и  $N$  так, что  $AK = CN = 8$ . Через точки  $K$  и  $N$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная ребру  $SB$ .
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $M$  — середину ребра  $SB$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $SD$  и  $KM$ .
23. В основании прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ , точка  $N$  лежит на ребре  $AC$ , причем  $AN : NC = 15 : 1$ . Катет  $AC$  в четыре раза больше бокового ребра  $AA_1$  призмы.
- Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна прямой  $CA_1$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $MN$  и  $CA_1$ , если  $AC = 16, BC = 2\sqrt{17}$ .
24. Основанием пирамиды  $ABCD$  является равносторонний треугольник  $ABC$ , длина стороны которого равна 4. Боковое ребро  $CD$  перпендикулярно плоскости основания и имеет длину  $\sqrt{2}$ . Пусть  $M$  — середина ребра  $BC$ , а  $N$  — середина ребра  $AB$ .
- Докажите, что угол между прямыми  $DM$  и  $CN$  равен  $45^\circ$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $DM$  и  $CN$ .
25. Основание прямой треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  — треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = AC = 8$ , а один из углов равен  $60^\circ$ . На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $P$  так, что  $AP : PA_1 = 1 : 2$ . Расстояние между прямыми  $AB$  и  $B_1 C_1$  равно  $18\sqrt{3}$ .
- Докажите, что основания высот треугольников  $ABC$  и  $PBC$ , проведенных к стороне  $BC$ , совпадают.
  - Найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $CBP$ .
26. В основании прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = BC, AC = 4\sqrt{2}$ . На ребре  $BB_1$  выбрана точка  $K$  так, что  $BK : B_1 K = 2 : 3$ . Угол между плоскостями  $ABC$  и  $AKC$  равен  $45^\circ$ .
- Докажите, что расстояние между прямыми  $AB$  и  $A_1 C_1$  равно боковому ребру призмы.
  - Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $A_1 C_1$ , если  $KC = 8$ .
27. В основании правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит треугольник  $ABC$ . На прямой  $AA_1$  отмечена точка  $D$  так, что  $A_1$  — середина  $AD$ . На прямой  $B_1 C_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $C_1$  — середина  $B_1 E$ .
- Докажите, что прямые  $A_1 B_1$  и  $DE$  перпендикулярны.
  - Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $DE$ , если  $AB = 4, AA_1 = 1$ .
28. Точка  $Q$  симметрична вершине  $S$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  относительно плоскости основания  $ABCD$ .
- Докажите, что плоскости  $SBC$  и  $QDA$  параллельны.
  - Найдите расстояние между плоскостями  $SBC$  и  $QDA$ , если сторона основания пирамиды  $SABCD$  равна 2, а ее боковое ребро равно  $\sqrt{2022}$ .
29. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребрами  $AB = BC = 6, AA_1 = 12$  точки  $M$  и  $K$  — середины  $AB$  и  $BC$  соответственно, точка  $N$  лежит на ребре  $BB_1$ , причем  $BN = 6$ . Через точку  $D$  провели плоскость  $\alpha$  параллельно плоскости  $KMN$ .
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $A_1$  и  $C_1$ .
  - Найдите расстояние между плоскостями  $KMN$  и  $\alpha$ .
30. Дан правильный треугольник  $ABC$ . Точка  $D$  лежит вне плоскости  $ABC$ ,  $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0,3$ .
- Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны.
  - Найдите расстояние между прямыми  $AD$  и  $BC$ , если  $AC = 6$ .

31. Основание  $ABCD$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина  $S$  расположена на оси  $OO_1$  цилиндра ( $O_1$  — центр верхнего основания цилиндра). Объем цилиндра равен  $450\pi$ , объем пирамиды равен 50.

- Докажите, что  $O_1S : SO = 5 : 1$ .
- Найдите расстояние между  $AS$  и  $CD$ , если диаметр основания цилиндра равен  $5\sqrt{2}$ .

32. В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = BC$  и  $AC = 16$ . На ребре  $BB_1$  выбрана точка  $F$  так, что  $BF : B_1F = 3 : 5$ . Угол между плоскостями  $AA_1C$  и  $AFC$  равен  $45^\circ$ .

- Докажите, что расстояние между прямыми  $AB$  и  $A_1C_1$  равно боковому ребру призмы.
- Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $A_1C_1$ , если  $FC = 10$ .

33. Основанием пирамиды  $SABC$  является равносторонний треугольник  $ABC$ , длина стороны которого равна  $4\sqrt{2}$ . Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $BC$  и  $AB$  соответственно.

- Докажите, что угол между прямыми  $SM$  и  $CN$  равен  $45^\circ$ .
- Найдите расстояние между  $SM$  и  $CN$ .

34. На высоте  $SO$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  взяли точку  $M$  так, что  $SM : MO = 2 : 3$ . Через точку  $M$  параллельно грани  $ADS$  провели плоскость  $\alpha$ .

- Докажите, что расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$  относится к расстоянию между прямыми  $BC$  и  $AS$  как  $4 : 5$ .
- Найдите расстояние от прямой  $BC$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 10.

35. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Докажите, что плоскость  $AMB_1$  параллельна прямой  $A_1C$ .
- Найдите расстояние между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $AMB_1$ , если параллелепипед прямоугольный,  $AB = 12$ ,  $AD = 12$  и  $AA_1 = 6$ .

36. Дана четырехугольная пирамида  $SABCD$ , в основании которой лежит ромб  $ABCD$  со стороной 10. Известно, что  $SA = SC = 10\sqrt{2}$ ,  $SB = 20$  и  $AC = 10$ .

- Докажите, что ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания пирамиды  $SABCD$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $SB$ .

37. Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны.

- Докажите, что  $AA_1 = AC$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $AC = 8$  и  $BC = 4$ .

38. Основанием треугольной призмы  $ABC_1B_1C_1$  является правильный треугольник  $ABC$  стороной 1, а боковое ребро равно  $\sqrt{2}$ . Диагональ боковой грани  $A_1B$  перпендикулярна плоскости основания. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$ .

- Докажите, что прямые  $AM$  и  $A_1C$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми  $A_1C$  и  $BC_1$ .

39. Дан цилиндр с центрами нижнего и верхнего оснований  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Объем цилиндра, равен  $\pi\sqrt{6}$ . На окружности нижнего основания выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на боковой поверхности выбрана, точка  $C$ , равноудалённая от оснований.

- Докажите, что объем тетраэдра  $O_1ABC$  не превосходит  $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $AO_1$  и  $CO_2$ , если отрезки  $BO_2$  и  $CO_1$  пересекаются,  $\angle AO_1B = 120^\circ$  и  $\angle O_2CA = 90^\circ$ .

40. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  точки  $M$  и  $N$  середины ребер  $SC$  и  $AD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BM$  параллельно  $SN$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $CD$  в отношении  $1 : 2$ .
- Найдите расстояние от прямой  $SN$  до плоскости  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро равно 12.

41. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  боковое ребро равно 9, а высота пирамиды  $SO$  равна  $3\sqrt{5}$ , точки  $M$  и  $T$  — середины отрезков  $BC$  и  $SM$  соответственно.

- Докажите, что  $AT$  — высота пирамиды, проведенная к грани  $SBC$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $AT$  и  $SB$ .

42. Диагонали  $BE$  и  $DF$  основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  пересекаются в точке  $P$ , а диагонали  $FE_1$  и  $EF_1$  боковой грани  $EFF_1E_1$  пересекаются в точке  $Q$ .

- Докажите, что прямая  $QP$  параллельна плоскости  $CB_1E_1$ .
- Найдите расстояние между прямой  $QP$  и плоскостью  $CB_1E_1$ , если сторона основания призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  равна  $2\sqrt{3}$ , а ее высота равна 4.

43. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечены точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $AD$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $B_1N$  и  $CM$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если  $B_1N = 7\sqrt{2}$ .

44. Через вершины  $A_1$  и  $C$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BC_1$ . Сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AB$  пополам.
- Найдите расстояние от прямой  $BC_1$  до плоскости  $\alpha$ .

45. В основании пирамиды  $ABCD$  лежит правильный треугольник  $ABC$ . Все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $AB = 8\sqrt{3}$ ,  $AD = 5\sqrt{3}$ .

46. Основанием треугольной пирамиды  $SABC$  является равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной  $4\sqrt{2}$ . Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Точки  $E$  и  $D$  — середины ребер  $BC$  и  $AB$  соответственно.

а) Докажите, что угол между  $SE$  и  $CD$  равен  $45^\circ$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $SE$  и  $CD$ .