1. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

2. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

3. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

4. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

6. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK и KE, если $\angle ECD = 15^\circ$.

7. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

8. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$.

а) Докажите, что $AD = 4BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

9. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O.

а) Докажите, что $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

10. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O. Прямая DO пересекает сторону AB в точке M, а прямая CO пересекает сторону AD в точке K.

а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.

б) Найдите площадь треугольника AOM, если $BC = 10$ и $AD = 15$.

11. Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN, если $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$, а радиус окружности равен 12.

12. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$.

13. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.

б) Найдите угол $\angle APC$, если $DM = 1$ и $MC = 4$.

14. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ с центром в точке O вписана трапеция $ABCD$. Основание трапеции AD является диаметром окружности, угол BAD равен 60°. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP : PD = 1 : 3$.

а) Докажите, что точка P — середина отрезка AO.

б) Найдите площадь треугольника BPE.

15. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружности, построенные на боковых сторонах KL и MN как на диаметрах, пересекаются в точках A и B.

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

б) Найдите AB, если известно, что боковые стороны трапеции равны 26 и 28, а средняя линия трапеции равна 15.

16. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 26$ и $BD = 24$.

17. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую BC в точке P. В каком отношении делит сторону AB (считая от точки B) прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AN : ND = 1 : 2$.

18. В параллелограмме $ABCD$ расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон AD, AB и BC, вторая — сторон AD, CD и BC.

а) Докажите, что общая внутренняя касательная l окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

б) Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а прямая l касается окружностей в точках M и N. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках M, N и в центрах окружностей, если $AD = 16$, а расстояние между центрами окружностей равно 10.

19. Трапеция $ABCD$ с большим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30^\circ$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH.

20. Дана трапеция $ABCD$, где $AB = BC = CD$, точка E лежит на плоскости так, что $BE \perp AD$ и $CE \perp BD$.

а) Докажите, что углы AEB и BDA равны.

б) Найдите площадь трапеции, если $AB = 50$, а $\cos AEB = \frac{4}{5}$.

21. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

а) Докажите, что AB — диаметр окружности, описанной около треугольника AOB.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника, вершины которого — точки касания окружности со сторонами трапеции, к площади самой трапеции $ABCD$, если известно, что $AB = CD$, а основания трапеции относятся как 1 : 2.

22. На окружности ω отмечены точки M, N, K таким образом, что MN — диаметр, а K — середина дуги MN. Точка E — середина хорды MK. Точка B — середина дуги KN, не содержащей точку M. Через точку E проведена хорда AB.

а) Докажите, что $AE : BE = 1 : 3$.

б) В окружность ω вписан прямоугольник $ABCD$. Найдите его площадь, если $MN = 3\sqrt{7}$.

23. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R с центром в точке O, его диагонали AC и BD пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD пересекаются в точке Q.

а) Докажите, что $AQ \cdot DQ + BP \cdot DP = OQ^2 - OP^2$.

б) Найдите R, если $AB = 5$, $CD = 6$, $\angle AQB = 30^\circ$.

24. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

25. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.

26. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям AD и BC. В эту трапецию вписали окружность с центром O. Прямая AO пересекает продолжение отрезка BC в точке E.

а) Докажите, что $AD = CE + CD$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AE = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.

27. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Отрезок AN пересекает окружность в точке K, а луч MK пересекает основание AD в точке L.

а) Докажите, что треугольник AKL подобен треугольнику MAL.

б) Найдите отношение $AL : LD$.

28. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, K — точка касания окружности со стороной AB.

а) Докажите, что $AB \cdot \sqrt{AK \cdot BK} = AO \cdot BO$.

б) Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

29. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ADB, касается отрезка AD в точке P, а прямая OP пересекает сторону AB в точке K.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BDOK$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $BDOK$, если $AB = 10$, $BC = \sqrt{19}$, $AC = 9$.

30. На окружности отмечены точки K, L, M, N, причем прямые KL и MN пересекаются вне круга в точке E, прямые LM и KN пересекаются вне круга в точке F. Биссектриса угла KEN пересекает отрезки LM и KN в точках P и R соответственно. Прямая, проведенная через точку F перпендикулярно прямой PR, пересекает отрезки KL и MN в точках S и Q соответственно.

а) Докажите, что $PQRS$ — ромб.

б) Найдите площадь четырехугольника $PQRS$, если известно, что $EL = 4$, $EM = 6$, $LM = 5$ и $KN = 15$.

31. Окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются между собой.

а) Докажите, что в трапецию можно вписать окружность.

б) Найдите основания этой трапеции, если её боковые стороны равны 3 и 8, а большая сторона основания видна из центра вписанной окружности под углом 120°.

32. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

33. В четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, если $AC = 12$ и $BD = 13$.

34. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD отмечена точка N так, что в четырехугольник $BCDN$ можно вписать окружность. Известно, что $\dfrac{BC}{AB} = \sqrt{2}$, $\dfrac{DN}{AN} = 1 + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

а) Докажите, что высоты параллелограмма, опущенные из вершины C, делят угол BCD на три равные части.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $BCDN$, если $AC = 2$.

35. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, а углы ABC и ADC — прямые.

а) Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются в точке пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

б) Найдите AC, если периметр треугольника ADC равен 44, а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и DBC, равно 6.

36. В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.

б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 1$.

37. В ромбе $ABCD$ точки K и L — середины сторон BC и CD соответственно. Прямые AK и AL пересекают диагональ BD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что $S_{APQ} = S_{BKP} + S_{DLQ}$.

б) Известно, что в пятиугольник $CKPQL$ можно вписать окружность. Найдите ее радиус, если сторона ромба $ABCD$ равна $6\sqrt{5}$.

38. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается ее боковой стороны CD в точке M. Луч AM вторично пересекает окружность в точке N, а прямую BC в точке K, причем $AN = 4$, $MN = 12$.

а) Докажите, что $\angle AMD = \angle MCK$.

б) Найдите основания трапеции.

39. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны AB в точке K, а стороны AD в точке E. Отрезки CK и CE пересекают окружность в точках M и P соответственно.

а) Докажите, что прямые EK и MP параллельны.

б) Найдите ME, если сторона квадрата равна 10.

40. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ вписана окружность с центром O. Из вершины C опущена высота CH.

а) Докажите, что прямая AO является серединным перпендикуляром к отрезку BH.

б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если радиус вписанной в неё окружности равен 4, а длина отрезка, соединяющего точки касания вписанной окружности с боковыми сторонами, равна $\dfrac{64}{15}$.

41. Окружность с центром в точке O, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC < AD$, касается боковой стороны CD в точке K. Прямая AK пересекает высоту CH трапеции в точке P и проходит через точку O.

а) Докажите, что $BC : AD = 1 : 3$.

б) Найдите отношение площади треугольника APQ к площади трапеции $ABCD$, если Q — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$.