1. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

2. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

3. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

4. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q.

а) Докажите, что отрезки PQ и OC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника OBC, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2m$.

6. Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

7. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

8. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла C. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2, если $AC = 20$ и $BC = 15$.

9. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT.

10. Угол BAC треугольника ABC равен α. Сторона BC является хордой такой окружности с центром O и радиусом R, которая проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 6$, $\alpha = 60^\circ$.

11. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K. К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе AP треугольника и пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что угол MOC равен углу NOK.

б) Найдите периметр треугольника ABC, если отношение площадей трапеции $AMNP$ и треугольника ABC равно 2 : 7, $MN = 2$, $AM + PN = 6$.

12. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60°$.

13. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямая BO пересекает окружность, описанную около треугольника CON вторично в точке P.

а) Докажите, что точка P лежит на прямой MN.

б) Найдите площадь треугольника ABP, если площадь треугольника ABC равна 24.

14. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK.

а) Докажите, что $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{CK}{BC}$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 13$, $BC = 7$ и $BK = \dfrac{7\sqrt{13}}{4}$.

15. В треугольник ABC вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 8$ и $CM = 12$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

16. В прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$ вписана окружность с центром O, касающаяся сторон BC, AC и AB треугольника в точках R, Q, P соответственно.

а) Докажите, что $AO \cdot BO \cdot CO = 10$.

б) Найдите площадь треугольника PQR.

17. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT.

18. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырехугольника $BOMN$, если $CN = 8$, $AM : MC = 1 : 3$.

19. В треугольнике ABC $AB = 3$, $\angle ACB = \arcsin\dfrac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырёхугольника $ABLM$ равна 2, $LM = 1$.

а) Докажите, что треугольник KNC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника KNC.

20. В каждый угол равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = 10$, $AC = BC = 13$, вписана окружность единичного радиуса, точки O_1, O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

а) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) площадь треугольника O_1, O_2, O_3.

21. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части.

а) Докажите, что $BC : CA : AB = 5 : 10 : 13$.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $BM = 12$.

22. На стороне KM остроугольного треугольника PKM ($PK \neq PM$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту PS в точке T, $PS = 8$, $TS = 6$, H — точка пересечения высот треугольника PKM.

а) Найдите PH.

б) Полуокружность пересекает стороны PK и PM в точках L и N соответственно. Найдите коэффициент подобия треугольников PKM и PNL, если радиус полуокружности равен 20.

23. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC, в котором $\cos\angle ABC = 0,8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

24. Окружность вписана в треугольник ABC, P — точка касания окружности со стороной AB, точка M — середина AB.

а) Докажите, что $MP = \dfrac{|AC - CB|}{2}$.

б) Найдите углы треугольника, если $MC = MA$, $AC > BC$, $MP = \dfrac{r}{2}$.

25. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AB опущена высота CH. В треугольнике ACH проведена биссектриса CE угла ACH.

а) Докажите, что треугольник BCE — равнобедренный.

б) Найдите EO, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и известно, что $AC = 8$, $BC = 6$.

26. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Точки I и J — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD соответственно.

а) Докажите, что прямые BI и DJ параллельны.

б) Найдите IJ, если $AC = 12$, $\cos\angle BDC = \dfrac{3}{7}$.

27. Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите ее радиус, если $AX = XY = 2$, а $AB = 4$.

28. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC, если $B_1C_1 = 9$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

29. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Касательная к окружности пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что сумма углов AOD и BOE равна 180°.

б) Найдите DE, если $AC = BC$, радиус окружности равен 3, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\angle BAC\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{11}$, а разность углов AOD и BOE равна 60°.

30. Биссектриса AD большего угла треугольника ABC со сторонами 24, 40 и 56 делит его на два треугольника, в каждый из них вписана окружность.

а) Докажите, что радиусы этих окружностей относятся как 9 : 10.

б) Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой AD.

31. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}6$ и сторона $AC = 24$.

32. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно так, что $BD + CE = BC$, точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

а) Докажите, что точки A, E, I и D лежат на одной окружности.

б) Точка D' симметрична точке D относительно прямой AI. Найдите радиус описанной окружности треугольника EDD', если $D'E = 2$, а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен $\dfrac{9}{2}$.

33. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

34. Периметр треугольника ABC равен 24. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC = 6$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90^\circ$.

35. Вписанная в треугольник ABC окружность ω_1 касается стороны BC в точке N так, что $CN : NB = 1 : 2$. Окружность ω_2 касается стороны BC в точке M так, что $BM : MC = 1 : 2$, а также касается продолжения стороны AC за точку C.

а) Докажите, что прямая AB касается окружности ω_2.

б) Найдите угол BAC, если $BC \perp AC$.

36. В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Площадь треугольника ABC равна $1{,}5 + \sqrt{3}$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

37. Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC = 9$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90^\circ$.

38. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с меньшей боковой стороной $AB = 4$ и $\angle ADC = \operatorname{arctg} 2$ из вершины D на диагональ AC опущен перпендикуляр DH. При этом треугольники ABC и DHA равны. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и DHA.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна CD.

б) Найдите площадь четырёхугольника O_1CDO_2.

39. Окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC, пересекает отрезок AO в точке M и касается стороны AB в точке N. Прямые NM и BO параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Прямая BO пересекает вписанную окружность в точке L $(BL > BO)$. Найдите отношение площади четырёхугольника $BNML$ к площади треугольника ABC, если $\cos \angle ABC = \dfrac{7}{9}$.

40. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны BA и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника MBN равен сумме $AB + BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если $BA = 11$, $BC = 13$, $AC = 12$.

41. В треугольнике ABC $BC = 8$, $AC = 7$ проведена биссектриса BE, которая пересекает сторону AC в точке E, причем известно, что центр O вписанной в треугольник ABC окружности делит BE в отношении $BO : OE = 2 : 1$.

а) Докажите, что сторона AB делится точкой касания вписанной окружности в отношении 5 : 7, считая от точки A.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

42. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отложены отрезки BP и AQ соответственно, причём $BP = AQ$, причем точки P и Q не являются серединами сторон AB и AC.

а) Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная его основанию BC, делит отрезок PQ пополам.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключённого внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $\angle A = 60^\circ$, $BP = 4$, а периметр треугольника ABC равен 18.

43. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся катетов AC, BC и гипотенузы AB в точках M, E и K соответственно. Отрезок EH — перпендикуляр из точки E на прямую MK.

а) Докажите, что $EK \parallel CH$.

б) Известно, что $AC = 15$, $BC = 8$. Найти отношение CH к EK.