

1. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC , а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB . Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E , а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F .

- Доказать, что площади треугольников ABC и ABF равны.
- Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$.

2. Точки A, B, C лежат на окружности радиуса 2 с центром O , а точка K — на прямой, касающейся этой окружности в точке B , причем угол AKC равен 46° , а длины отрезков AK, BK, CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке).

- Докажите, что углы ACK и AOK равны.
- Найдите расстояние между точками A и C .

3. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E , лежащей на стороне CD . Известно, что $CD : BC = 3 : 2$.

- Докажите, что расстояния от точки E до прямых AD и BC равны.
- Найдите отношение площадей треугольников ADE и BCE .

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C . Касательная к первой окружности, проходящая через точку B , пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5, AC = 4$. Точка O — центр окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

- Докажите, что $AO = \frac{AC}{2}$.
- Найдите длину отрезка CE .

5. Через вершины B и C треугольника ABC проходит окружность, пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках K и M .

- Доказать, что треугольники ABC и AMK подобны.
- Найти MK и AM , если $AB = 2, BC = 4, CA = 5, AK = 1$.

6. В треугольнике KLM угол L тупой, а сторона KM равна 6. Центр O окружности, проходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM лежит на окружности, описанной около треугольника KLM .

- Докажите, что угол KOM равен 120° .
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM .

7. Две окружности с центрами O и Q пересекаются друг с другом в точках A и B , пересекают биссектрису угла OAQ в точках C и D соответственно. Отрезки OQ и AD пересекаются в точке E , причем площади треугольников OAE и QAE равны соответственно 18 и 42.

- Докажите, что треугольники AQO и BDC подобны.
- Найдите площадь четырехугольника $OAQD$.

8. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку A , параллельна BD . Известно, что $CD : ED = 3 : 2$, а площадь треугольника ABE равна 8.

- Докажите, что треугольник ABD — равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника ABC .

9. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E , причём $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K . Отрезки AK и CE пересекаются в точке M .

- Докажите подобие треугольников ACE и OKB , где O — центр данной окружности.
- Найдите площадь треугольника CKM , если $AB = 10, AE = 1$.

10. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B . На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C . Из точки C на прямые OA, OB и AB опущены перпендикуляры соответственно CK, CL и CM .

- Докажите подобие треугольников AKC и BMC, AMC и BLC .
- Найдите CM , если $CK = 4, CL = 9$.

11. Две окружности касаются в точке O , причем радиус окружности с центром в точке O' больше, чем радиус окружности с центром в точке O'' . Прямая $O'O''$ пересекает меньшую окружность в точке K (K отлично от O). Отрезок $O'K = a$. Прямая t касается большей окружности в точке P так, что угол $O''O'P$ — прямой. Отрезок $PK = b$. Найдите площадь треугольника $O'O'P$.

12. В системе координат задана точка $M(x, y), x > 0, y > 0$. Дана окружность с центром в точке M радиуса r , причем любая точка окружности имеет положительные координаты. Прямая, проходящая через точку $O(0; 0)$ и через точку M , пересекает окружность в точках K и P , причем ордината точки K меньше, чем ордината точки P . Прямая, которая касается окружности в точке K , пересекает прямые $x = 0$ и $y = 0$ в точках A и B .

Найдите площадь треугольника OKB .

13. В окружности проведены хорды KL, MN, PS . Хорды KL, PS пересекаются в точке C , хорды KL, MN пересекаются в точке A , хорды MN и PS пересекаются в точке B , причем $AL = CK, AM = BN, BS = 5, BC = 4$. Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна 45 градусам.

14. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

15. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности — 12. Найдите стороны треугольника.

16. Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B — точки касания). Найдите расстояние между точками A и B .

17. Биссектрисы AN и BM треугольника ABC пересекаются в точке O , причем $BO : OM = 4 : 3, CN = 18\sqrt{35}$. В четырехугольник $ONCM$ вписана окружность.

- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- Найдите радиус окружности.

18. CA и CB — касательные к окружности в точках A и B соответственно, AD — её диаметр. Прямые BD и AC пересекаются в точке E .

- Докажите, что точка C — середина отрезка AE .
- Найдите сумму радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABE, ABD и AED , если известно, что $BA = 12$.

19. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

20. К двум окружностям с центрами O_1 и O_2 и радиусами 6 и 3 проведены три общие касательные: одна внутренняя и две внешних. Пусть A и B — точки пересечения общей внутренней касательной с общими внешними.

- Докажите, что около четырехугольника O_1AO_2B можно описать окружность.
- Найдите расстояние между точками касания окружностей с их общей внутренней касательной, если известно, что $O_1O_2 = 15$.

21. Точка M лежит на диаметре AB окружности с центром O . C и D — точки окружности, расположенные по одну сторону от AB , причем $\angle CMA = \angle DMB$.

- Докажите, что $\angle OCM = \angle ODM$.
- Найдите площадь четырехугольника $COMD$, если известно, что $OM = 4, BM = 2, \angle CMA = \angle DMB = 45^\circ$.

22. Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$, касается стороны AB , пересекает сторону CD в точке M и касается стороны AD в точке K .

- Докажите, что угол CKD равен углу KMD .
- Найдите сторону AB , зная, что $AD = 18, DM = 4$.

23. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей.

- Докажите, что точки D, B и C лежат на одной прямой.
- Найдите произведение $AD \cdot AC$, если известно, что $AB = 8$, а диаметр окружности, описанной около треугольника ADC , равен 10.

24. Окружность ω_1 с центром O_1 и окружность ω_2 с центром O_2 касаются внешним образом. Из точки O_1 к ω_2 проведена касательная O_1A , а из точки O_2 к ω_1 проведена касательная O_1B (A и B — точки касания).

- Докажите, что углы O_1AB и O_1O_2B равны.
- Найдите площадь четырехугольника O_1O_2AB , если известно, что точки касания A и B лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 , а радиусы окружностей равны соответственно 2 и 3.

25. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке O , причем касательная к окружности, проходящая через точку C , параллельна BD .

- Докажите, что $DC^2 = AC \cdot CO$.
- Найдите площадь треугольника CDO , если известно, что $AB : BO = 3 : 1$, а площадь треугольника ACD равна 36.

26. Две окружности касаются внутренним образом в точке A так, что меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке K . Прямые AB и AC вторично пересекают меньшую окружность в точках P и M соответственно.

- Докажите, что $PM \parallel BC$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если $PM = 12$, а радиус большей окружности равен 20.

27. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

- Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

28. Продолжение общей хорды AB двух пересекающихся окружностей радиусов 8 и 2 пересекает их общую касательную в точке C , точка A лежит между B и C , а M и N — точки касания.

- Докажите, что отношение расстояний от точки C до прямых AM и AN равно $\frac{1}{2}$.
- Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, M и N .

29. На диаметре AB полуокруга взята точка C и в полуокруге на отрезках AC и CB как на диаметрах построены два полуокруга. Из точки C восстановлен перпендикуляр к AB и с обеих сторон от него построены два круга, касающиеся как этого перпендикуляра, так и обоих полуокругов.

- Докажите, что радиусы построенных кругов равны.
- Найдите их радиусы, если $AB = 12$ и $AC : CB = 1 : 3$.

30. Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M . Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков $AM = 28, MB = 4$, а радиус большей окружности равен 20.

31. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом. A_1A_2 и B_1B_2 — их общие внешние касательные (A_1 и B_1 — точки касания с ω_1 , A_2 и B_2 — точки касания с ω_2).

а) Докажите, что расстояние между хордами A_1B_1 и A_2B_2 равно среднему гармоническому диаметров окружностей. (средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется значение выражения $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$).

б) Найдите площадь четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$, если радиусы окружностей равны соответственно 9 и 4.

32. Точка O — середина отрезка AC . На отрезках AC и AO , как на диаметрах, построены две окружности. Хорда CK одной из них касается другой окружности в точке P .

а) Докажите, что $\operatorname{tg} \angle CAP = \frac{PC}{AC}$.

б) Найдите площадь треугольника AKC , если известно, что $OC = 3$.

33. Три окружности, две из которых одинакового радиуса, попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C .

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус круга, вписанного в четырехугольник с вершинами в точках A , B , C , O , если известно, что радиусы окружностей 6; 6 и 4, а точка O — центр меньшей из них.

34. Дана окружность. Продолжения диаметра AB и хорды PK пересекаются под углом 30° в точке C . Известно, что $CB : AB = 1 : 4$; AK пересекает BP в точке T .

а) Докажите, что $AP : AT = 3 : 4$.

б) Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках A , B , P и K , если радиус окружности равен 4.

35. Окружности с центрами в точках A , B и C и радиусами, равными a , b и c соответственно, попарно касаются друг друга внешним образом в точках K , M , P .

а) Докажите, что отношение площади треугольника KMP к площади треугольника ABC равно $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMP , если известно, что $a = 6$, $b = 7$, $c = 1$.

36. Две окружности касаются внутренним образом в точке K . Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке L .

а) Докажите, что KL — биссектриса угла AKB .

б) Найдите длину отрезка KL , если известно, что радиусы большей и меньшей окружностей равны соответственно 6 и 2, а угол AKB равен 90° .

37. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K . Прямая p касается первой окружности в точке M , а второй — в точке N .

а) Докажите, что расстояние от точки K до прямой p равно $\frac{MK \cdot KN}{MN}$.

б) Найдите площадь треугольника MNK , если известно, что радиусы окружностей равны соответственно 12 и 3.

38. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности ω радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности ω , который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен 75° .

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Найдите расстояние между центрами окружности ω и окружности, вписанной в треугольник ABC .

39. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E .

а) Докажите, что вокруг четырехугольника $ACED$ можно описать окружность

б) Найдите AE , если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

40. В треугольнике ABC угол B равен 60° . Через точки A и B проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке A . Через точки B и C проведена окружность радиуса 4, касающаяся прямой AC в точке C .

а) Найдите длину стороны AC .

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей.

41. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E . Точка F — середина стороны AB , а точка G — точка пересечения окружности и отрезка FD , отличная от D . Касательная к окружности, проходящая через точку G , пересекает сторону AB в точке H . Известно, что $FH : HE = 2 : 3$.

а) Докажите, что $\angle HGE = \angle EDG$.

б) Найдите $\angle BCA$.

42. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1 . Окружность, описанная вокруг треугольника ANA_1 , где точка N — середина стороны AB , пересекла прямую A_1B_1 в точке K .

а) Докажите, что прямая AK касается окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Найдите отношение площадей четырехугольника ABA_1B_1 и треугольника CA_1B_1 , если $\angle ABC = 45^\circ$, $AB_1 = BN = 1$.

43. Окружности, построенные на сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$, как на диаметрах, касаются в точке M .

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Пусть P и Q — точки пересечения продолжений диагоналей параллелограмма за точки A и D с общей касательной к окружностям. Найдите площадь треугольника PQC , если радиусы окружностей равны 2, а синус угла BAD равен $\frac{2}{3}$.

44. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке G . Первая окружность с центром в точке Q касается двух параллельных прямых a и b . Вторая — имеет центр в точке O , касается прямой a , а общая касательная окружностей, проходящая через точку G , пересекает прямую a в точке D , а прямую b — в точке A . Прямая AO перпендикулярна прямым a и b .

а) Докажите, что радиусы окружностей относятся как 1 : 2.

б) Найдите площадь четырехугольника $AODQ$, если радиус большей окружности равен 8.

45. Около окружности радиуса 1 описаны ромб и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 5.

а) Найдите сторону ромба.

б) Найдите часть площади ромба, находящуюся внутри треугольника.

46. Три точки A , B и C разбивают окружность на три дуги. Каждая из дуг разбивается на три равные части так, что на окружности последовательно стоят точки A , A_1 , A_2 , B , B_1 , B_2 , C , C_1 , C_2 .

А) Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 , B_1C_2 и C_1A_2 образуют равносторонний треугольник.

Б) Найдите стороны этого треугольника, если $AC = 1$, $BC = 2$, $AB = \sqrt{3}$.