1. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 8$ и $CD = 5$ биссектриса угла B пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла D пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка L лежит на основании BC.

а) Докажите, что прямая MK проходит через середину стороны AB.

б) Найти отношение $KL : MN$, если $LM : KN = 4 : 7$.

2. Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MK = NL$.

б) Найдите MN, если известно, что $BC = 3$, $AD = 8$ и $MK : KL = 1 : 3$.

3. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки A, B, C, D — середины сторон KL, LM, MN, NK соответственно. Известно, что $KL = 3$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Площади четырехугольников $KAOD$, $LAOB$ и $NDOC$ равны соответственно 6, 6 и 9.

а) Докажите, что площади четырехугольников $MCOB$ и $NDOC$ равны.

б) Найдите длину отрезка MN.

4. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей.

а) Докажите, что выполняется равенство $S_{ABCD} = (\sqrt{S_{AOD}} + \sqrt{S_{BOC}})^2$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $S_{BOC} = 49,\ S_{AOD} = 64$.

5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 7. На сторонах BC и CD даны точки M и N такие, что периметр треугольника CMN равен 14.

а) Докажите, что B и D — точки касания вневписанной окружности треугольника CMN, а её центр находится на вершине A квадрата $ABCD$.

б) Найдите угол MAN.

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно.

а) Докажите, что точка E есть центр вневписанной окружности для треугольников OCB, где O — точка пересечения прямых CD и AB.

б) Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, если угол A равен 35°, угол D равен 145°, а площадь треугольника BCE равна 11.

7. В параллелограмме $ABCD$диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

8. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 7$. Найдите BC, если $AB = 12$.

9. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos\angle KLM = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ LN.

10. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1 : 3.

11. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20 градусов больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

12. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении 2 : 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60.

13. Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Найдите основания этой трапеции.

14. Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

15. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ADP, проведённую из вершины D, если известно, что сторона квадрата равна 1.

16. В трапеции $ABCD$ BC и AD — основания. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в ее середине — точке P.

а) Докажите, что BP – биссектриса угла ABC.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $AP = 8$, $BP = 6$.

17. Точка E — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, прямые BE и AC взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COE равны.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 3$, $BC = 4$.

18. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Периметры треугольников AOB, BOC, COD и DOA равны между собой.

А) Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DOA, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC и COD равны соответственно 3, 4 и 6.

19. Трапеция $ABCD$ с углами при одном основании α и β описана около круга.

а) Докажите, что отношение площади трапеции к площади круга выражается формулой $\frac{S_{\text{тр}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$;

б) Найдите площадь прямоугольной трапеции $ABCD$, если $\alpha = \frac{\pi}{3}$, а площадь вписанного круга равна π.

20. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются под прямым углом. BH — высота к большему основанию CD, EF — средняя линия трапеции.

а) Докажите, что $BH = DH$.

б) Найдите площадь трапеции, если $EF = 5$.

21. В трапеции параллельно основаниям проведены четыре отрезка с концами на боковых сторонах: KL, MN, RS и TQ. Известно, что первый отрезок проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, второй — делит ее на два подобных четырехугольника, третий — соединяет середины боковых сторон, четвертый разбивает трапецию на две равновеликие части.

а) Найдите длины этих отрезков.

б) Докажите, что $KL < MN < RS < TQ$.

22. В равнобокой описанной трапеции $ABCD$, где угол B тупой, а BC и AD — основания, проведены: 1) биссектриса угла B; 2) высота из вершины C; 3) прямая, параллельная AB и проходящая через середину отрезка CD.

а) Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей трапеции $ABCD$, если известно, что $BC = 8$, $AD = 18$.

23. В трапеции $ABCD$ площадью, равной 30, диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке K.

А) Докажите, что трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

Б) Найдите площадь треугольника AD, если известно, что $\angle AKD = 30°$, а $BC < AD$.

24. В четырехугольник $ABCD$ биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M, а биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Известно, что $AKCM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BK = 3$, $AM = 2$, а угол между диагоналями AC и BD равен 60°.

25. В параллелограмме (отличном от ромба) проведены биссектрисы четырех углов.

А) Докажите, что в четырехугольнике, ограниченном биссектрисами, диагонали равны.

Б) Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами, если известно, что стороны параллелограмма равны 3 и 5 , а угол параллелограмма равен 60°.

26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны.

а) Докажите, что точки A и D одинаково удалены от прямой BC.

б) Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что $AB = 13$, $BC = 10$, $CD = 15$, $DA = 24$.

27. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB — в точке M. Найдите $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

28. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

29. Две прямые, перпендикулярные стороне AC треугольника ABC, делят этот треугольник на три равновеликие части. Известно, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой и равны стороне AC. Найдите углы треугольника ABC.

30. В ромбе $ABCD$ со стороной 2 и углом 60° проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

31. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причем $BN : NC = 1 : 3$. Оказалось, что прямые AN и AC разделили отрезок BM на три равные части.

а) Докажите, что точка M — середина стороны AD параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника, ограниченного прямыми AN, AC, BM и BD равна 16.

32. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, M, P, E — середины сторон AB, BC, CD, и DA соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $KMPE$ равна половине площади четырёхугольника $ABCD$.

б) Найдите большую диагональ четырёхугольника $KMPE$, если известно, что $AC = 6$, $BD = 8$, а сумма площадей треугольников AKE и CMP равна $3\sqrt{3}$.

33. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна стороне AD.

а) Докажите, что прямая CD касается окружности ω, описанной около треугольника ABD.

б) Пусть прямая CB вторично пересекает ω в точке K. Найдите $KD : AC$ при условии, что угол BDA равен $120°$.

34. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружности, построенные на боковых сторонах этой трапеции, как на диаметрах, пересекаются в точках P и K.

а) Докажите, что прямые PK и BC перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка PK, если известно, что $AD = 20$, $BC = 6$, $AB = 16$, $DC = 14$.

35. Диагонали AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ разделены точками M и N так, что $AM : AC = CN : CE$ и точки B, M и N лежат на одной прямой.

а) Докажите, что точки B, O, N и D лежат на одной окружности (точка O — центр шестиугольника).

б) Найдите отношение $AM : AC$.

36. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD. Отрезок BE пересекает диагональ AC в точке P, $AB = PD$.

а) Докажите, что отрезок BE перпендикулярен диагонали AC.

б) Найдите площадь параллелограмма, если $AB = 2$ см, $BC = 3$ см.

37. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK, BM и CN. На стороне AB выбрана точка P так, что окружность описанная около треугольника PKM касается стороны AB.

а) Докажите, что угол KAM равен углу MBC.

б) Найдите PN, если $PA = 30$, $PB = 10$.

38. Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет 0,09 площади трапеции $ABCD$.

39. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC.

а) Докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка OD, если $BC = 16$ и $AB = 10$.

40. а) Докажите, что сумма углов A, B, C, D, E в вершинах произвольной 5-конечной звезды равна 180° (рис. 1).

б) Найдите площадь 5-конечной звезды, вершины которой совпадают с пятью вершинами правильного шестиугольника, если известно, что сторона последнего равна 6 (рис. 2).

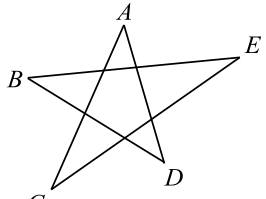


Рис. 1

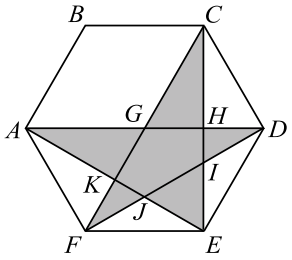


Рис. 2 решуегэ.рф

41. В треугольнике ABC точка M — середина AC.

а) Докажите, что длина отрезка BM больше полуразности, но меньше полусуммы длин сторон AB и BC.

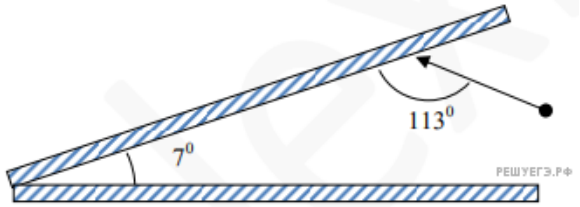
б) Окружность проходит через точки B, C, M. Найдите хорду этой окружности, лежащую на прямой AB, если известно, что $AB = 5$, $BC = 3$, $BM = 2$.

42. В трапеции $ABCD$ $BC \| AD$, $\angle ABC = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD — в точке N.

а) Докажите подобие треугольников ABN и DCM

б) Найдите расстояние от точки A до прямой BN, если $MC = 5$, $BN = 3$, а расстояние от точки D до прямой MC равно 6.

43. Два борта бильярдного стола образуют угол 7°, как указано на рисунке. На столе лежит бильярдный шар A, который катится без трения в сторону одного из бортов под углом 113°. Отражения от бортов абсолютно упругие. Сколько раз шар отразится от бортов?



44. На стороне BC треугольника ABC отмечена K точка так, что $AK = 4$, $BK = 9$, $KC = 3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$ и $\angle APB = \angle BAC$

а) Докажите подобие треугольников ABC и AKC;

б) Найдите DP.

45. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD = 3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q, $AD = 2BC$.

а) Докажите, что точка Q — середина отрезка AR

б) Найдите площадь треугольника APQ.

46. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность с центром в точке B и радиусом AB пересекает продолжение стороны AB в точке M. Прямая MC пересекает прямую AD в точке K, а окружность во второй раз в точке F.

а) Докажите, что $DK = DF$.

б) Найдите KC, если $BF = 20$, $DF = 21$.

47. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что отрезок AK пересекает медиану BD в точке E так, что $AE = BC$.

а) Докажите, что $BK = KE$.

б) Найдите площадь четырехугольника $CDEK$, если известно, что $AB = 13$, $AE = 7$, $AD = 4$.

48. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ трапеция.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $LK : KM = 1 : 3$.

49. В четырехугольнике $ABCD$ через каждую его вершину проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырехугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвертая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырехугольника, если один из них равен 108°?

50. Точка N делит диагональ трапеции $ABCD$ в отношении $CN : NA = 2 : 1$. Длины оснований BC и AD относятся как $1 : 3$. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M.

а) Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

б) Найдите длину отрезка MN, если $MD = 9$.

51. Точки K и L являются серединами боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на медиане AL так, что $AM : ML = 13 : 12$. Окружность ω с центром в точке M касается прямой AC и пересекает прямую KL в точках P и Q, $KL = 10$, $PQ = 4$.

а) Найти радиус окружности ω.

б) Найти периметр треугольника ABC.

52. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что треугольник CKD равносторонний. Известно, что расстояния от точки K до прямых AD, AB и BC равны соответственно 3, 6 и 5.

а) Найдите площадь параллелограмма.

б) Окружность, описанная около треугольника CKD пересекает сторону AD в точке P. Найдите отношение $AP : AD$.

53. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADMN$ и $BCRS$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке T.

а) Докажите, что центры квадратов и точка T лежат на одной прямой.

б) Найдите длину отрезка RN, если $AD = 8$, $BC = 3$, а $TN = 20$.

54. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC равны соответственно 10, 8 и 6.

а) Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

55. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 6$, $AD = 18$, сторона $AB = 10$. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке K, образуя прямой угол AKD. Окружность ω проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке P.

а) Найдите площадь трапеции.

б) Найдите радиус окружности ω.

56. Окружность с центром O касается диагонали AC и сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$. Расстояния от точки O до прямых AD и AC равны 8 и 6 соответственно, $OA = 10$.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

57. В пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ площади всех треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_1$, $A_5A_1A_2$ равны 1.

а) Докажите, что прямая A_1A_2 параллельна прямой A_3A_5.

б) Найдите площадь пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

58. На гипотенузе KL равнобедренного прямоугольного треугольника KLM вне треугольника построен квадрат $KLPQ$. Прямая MQ пересекает гипотенузу KL в точке N.

а) Докажите, что $KN : NL = 1 : 2$.

б) Прямая, проходящая через точку N перпендикулярно MQ, пересекает отрезок LP в точке R. Найдите LR, ели $KQ = 9$.

59. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, которой $AB = CD$, $AC = AD$, $\angle CAD = \angle CDM$, а M — середина основания BC.

а) Докажите, что острый угол при основании трапеции равен 75°.

б) Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 2.

60. В трапеции $KLMN$ основания LM и KN равны 2 и 8 соответственно. Из точки E, лежащей на стороне MN, опущен перпендикуляр EF на сторону KL. Известно, что F — середина стороны KL, $FM = 3$ и что площадь четырехугольника $KFEN$ в четыре раза больше площади четырехугольника $LFEM$.

а) Докажите, что прямые FN и LE параллельны.

б) Найдите длину отрезка FN.

61. На стороне AB треугольника ABC взята точка D таким образом, что $CD = \sqrt{13}$ и $\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD} = \dfrac{4}{3}$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB = \dfrac{2\pi}{3}$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой.

а) Докажите, что четырехугольник $CMDN$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

62. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 3 и 9 соответственно. Из точки K, лежащей на стороне CD, опущен перпендикуляр KL, на сторону AB. Известно, что L — середина стороны AB, $CL = 4$ и что площадь четырёхугольника $ALKD$ в 3 раза больше площади четырёхугольника $BCKL$.

а) Докажите, что прямые BK и DL параллельны.

б) Найдите длину отрезка DL.

63. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AP и CQ соответственно (точки P и Q не являются серединами сторон AB и AC).

а) Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная его основанию BC, делит отрезок PQ пополам.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $\angle A = 60^\circ$, $CQ = \sqrt{3}$ и $BP = 2\sqrt{3}$.

64. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, $\angle BAD = \operatorname{arctg}\sqrt{5}$, $MN \perp ND$.

а) Докажите, что $MD : ND = 3 : 2$.

б) Найдите отношение площади треугольника MND к площади параллелограмма $ABCD$.

65. Прямая p, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает прямые AB, AC, BD и CD в точках E, F, G и H соответственно, причём $EF = FG$.

а) Докажите, что точки пересечения прямой p с диагоналями AC и BD делят отрезок EH на три равных части;

б) Найдите EF, если $BC = 3$, $AD = 4$.