1. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

2. На доске написано число 2015 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1009 чисел?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

3. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

4. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор −11, −7, −5, −4, −1, 2, 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

5. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

6. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

7. Каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9 по одному записывают на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

8. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

9. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

10. Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, ..., 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

11. На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.

б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?

в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

12. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанных на доске заменяется на два числа: $a+b$ и $2a-1$ или $a+b$ и $2b-1$.

Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5 соответственно.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100?

в) Сделали 2015 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

13. На проекте «Мисс Чмаровка — 2016» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. При этом каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление Изольды Кабановой все члены жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Могут ли итоговые баллы, вычисленные по старой и новой системам оценивания, оказаться одинаковыми?

б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, оказаться равной $\frac{1}{8}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

14. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

15. Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

16. Каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

17. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

18. На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

19. Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n, а остальные числа, равные n, стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 105, 315, 945?

в) Приведите все примеры шести задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 82.

20. Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n, а остальные числа, равные n, стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 5, 10, 11, 22, 25, 55, 110, 275, 550?

в) Приведите все примеры пяти задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 91.

21. Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем среднее арифметическое результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа, потом среднее арифметическое полученного результата и пятого числа — число A.

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?

б) Может ли число A быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?

в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

22. На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 7, а зелёные числа кратны 5. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше 2325, если на доске написаны только кратные 5 числа?

б) Может ли сумма чисел быть 1467, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1467.

23. На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 8, а зелёные числа кратны 3. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше 1395, если на доске написаны только кратные 3 числа?

б) Может ли сумма чисел быть 1066, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1066.

24. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5100.

а) Может ли быть записано число 250?

б) Можно ли обойтись без числа 11?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть на доске?

25. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

26. На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли быть 24 четных числа?

б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7?

в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 7 может быть на доске?

27. На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое или оканчивается на 9, или четное, а сумма чисел равна 877.

а) Может ли быть на доске 27 четных чисел?

б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 9?

в) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 9 может быть на доске?

28. На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли.

а) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

29. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.

30. На конкурсе «Мисс−261» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. Каждый судья выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление участницы C все члены жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются две наибольшие оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

а) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, быть равной 18?

б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, быть равной $\frac{1}{2019}$?

в) Найдите наименьшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

31. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 34, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 9 до 20 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 1, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

32. Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой карточке написано натуральное число. Среднее арифметическое всех чисел равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?

б) Может ли быть 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

33. На доске написано 19 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 11. Среднее арифметическое написанных на доске чисел равно 10. С этими числами произвели следующие действия: четные числа разделили на 2, а нечетные — умножили на 2. Пусть A — среднее арифметическое полученных чисел.

а) Могли ли оказаться так, что $A = 17$?

б) Могли ли оказаться так, что $A = 7$?

в) Найдите наибольшее возможное значение A.

34. На листочке записано 13 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 7, среднее арифметическое семи наибольших из них равно 16.

а) Может ли наименьшее из 13 чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех 13 чисел равняться 12?

в) Пусть P — среднее арифметическое всех 13 чисел, Q — седьмое по величине число. Найдите наибольшее значение выражения $P - Q$.

35. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел за эти дни?

36. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

37. На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 1 и 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 173?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 109?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1021?

38. На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма всех записанных на доске чисел равна 1135.

а) Может ли на доске быть ровно 31 четное число?

б) Могут ли ровно семь чисел на доске оканчиваться на 7?

в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

39. На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 2, но не превосходит 42. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 6. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 2, с доски стерли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 10?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске оказаться больше 8, но меньше 9?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

40. Аня играет в игру: на доске написаны два различных натуральных числа a и b, оба меньше 1000. Если $\dfrac{3a+b}{4}$ и $\dfrac{a+3b}{4}$ оба натуральные, то Аня делает ход — заменяет этими двумя числами предыдущие. Если хотя бы одно из этих чисел не является натуральным, то игра прекращается.

а) Может ли игра продолжаться ровно три хода?

б) Существует ли два начальных числа таких, что игра будет продолжаться не менее 9 ходов?

в) Аня сделала первый ход в игре. Найдите наибольшее возможное отношение произведения полученных двух чисел к произведению предыдущих двух чисел.

41. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные произведения (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 56, 84, 168?

в) Известно, что набор на доске состоит ровно из 31 числа и имеет вид 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, … , 1080, то есть известны семь первых и одно последнее числа набора. Приведите все возможные примеры задуманных чисел.

42. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если изначально по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 39, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 199 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

43. По кругу записано несколько (два и более) различных натуральных чисел. Каждое число или в три раза больше соседнего слева числа, или на два меньше.

а) Могут ли быть выписаны и число 5, и число 6?

б) Могут ли быть выписаны ровно семь чисел?

в) Какое максимальное значение может иметь наибольшее из выписанных чисел, если сумма всех выписанных чисел не превосходит 2021?

44. На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое всех написанных чисел было равно 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, вдвое меньшее первоначального. Числа, оказавшиеся после этого меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, стать больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел стать больше 12, но меньше 13?

в) Найдите максимальное возможное значение среднего арифметического оставшихся на доске чисел.

45. На доске разрешается написать n таких попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, ..., n-1$ выполнено равенство $a_{k+1} = \dfrac{a_k + a_{k-1}}{2}$.

а) Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_4 = 2021$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось неравенство $|a_2 - a_1| < 2021$?

в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа. Какое наименьшее значение может принимать a_{10}?

46. В течение n дней ежедневно на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 5. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество — меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 4?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 3?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел за все дни?

47. Есть желтые и белые карточки, всего — 100 штук. На каждой написано натуральное число, среднее арифметическое всех чисел равно 32. Все числа на желтых карточках разные. При этом любое число на желтой карточке больше, чем любое число на белой. Все числа на желтых карточках увеличили в 3 раза, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 94,6.

а) Может ли быть ровно 70 желтых карточек?

б) Могут ли все числа на белых карточках быть различными?

в) Какое наибольшее количество желтых карточек может быть?

48. На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зеленого, либо красного цвета. Каждое зеленое число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зеленые числа различны и все красные различны; какое-то зеленое может равняться какому-то красному числу.

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

49. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b, таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $b - a$, и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $b - a$.

а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18, 19 и 20?

б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равно 25?

в) Найдите наибольшее значение N.

50. На доске написано несколько различных натуральных чисел. Дробная часть среднего арифметического этих чисел равна 0,32 (то есть если вычесть из среднего арифметического этих чисел 0,32, то получится целое число).

а) Могло ли на доске быть написано меньше 100 чисел?

б) Могло ли на доске быть написано меньше 20 чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение среднего арифметического этих чисел.

51. На доске разрешается в одну строку так написать $n \geqslant 3$ различных натуральных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, чтобы для любого $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-2)$ число a_{k+2} равнялось либо сумме, либо разности, либо произведению, либо частному взятых в некотором порядке чисел a_{k+1} и a_k. Например, этим правилам удовлетворяют 4 числа 3, 12, 4, 8, а также 5 чисел 8, 2, 4, 6, 24, написанные в указанном порядке.

а) Можно ли по этим правилам так написать $n = 5$ чисел, чтобы среди них в некотором порядке встретились четыре числа 1, 2, 3 и 4?

б) Можно ли по этим правилам так написать $n = 4$ нечетных числа, чтобы среди них в некотором порядке встретились три числа 3, 5 и 7?

в) Какое наименьшее значение может принимать n, если на доске в некотором порядке встречаются числа 1, 2 и 8?

52. На листочке написано более 100, но меньше 115 целых чисел. Среднее арифметическое чисел, меньших 13, равно −20, а среднее арифметическое чисел, больших 13, равно 35. Среднее арифметическое всех чисел, записанных на листочке, равно 7.

а) Сколько чисел записано на листочке?

б) Может ли чисел, больших 13, быть больше, чем чисел, меньших 13?

в) Какое наибольшее количество чисел, которые больше 13, может быть среди этих чисел, если известно, что есть хотя бы одно число, равное 13?

53. На доске в первой строке написано два натуральных числа n и $n + 1$, а во второй строке по одному разу записаны те и только те натуральные числа, которые являются делителями одного из чисел первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 6 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

в) Сколько существует таких чисел $n < 2000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

54. На доске написано трёхзначное число A. Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B, затем Коля записывает число A и зачеркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C.

а) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $A > 140$.

б) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $440 \leqslant A < 500$.

в) Найдите наибольшее число A до 900 для которого выполняется $A = B \cdot C$.

55. На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?

в) Найдите наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

56. Шестизначное число, в десятичной записи которого присутствуют по одному разу цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, будем называть хорошим.

а) Может ли хорошее число быть простым?

б) Может ли хорошее число иметь натуральных 63 делителя?

в) Может ли хорошее число делиться на 11?

г) Сколько хороших чисел делится на 12?

57. На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1 + 1 + 111 + 11 + 11 + 1 = 136$.

а) Можно ли получить сумму 122, если $n = 59$?

б) Можно ли получить сумму 123, если $n = 59$?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n = 59$?

58. На доске написаны числа 7 и 8. За один ход разрешено заменить написанную на доске пару чисел a и b парой $2a-1$ и $a+b$ (например, из пары 7 и 8 за один ход можно получить либо числа 13 и 15, либо числа 15 и 15).

а) Может ли случиться так, что после нескольких ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 99?

б) Может ли случиться так, что после 22 ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 8 787 878?

в) После 1001 хода на доске получили пару чисел, не равных друг другу. Какое наименьшее значение может иметь разность между большим и меньшим из этих чисел.

59. Из набора цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру один раз.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 15 008?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 94 358?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

60. На доске в первой строке написано $n \geqslant 2$ различных натуральных чисел, а во второй — по одному разу те и только те натуральные числа, которые являются наименьшим общим кратным каких-либо двух различных чисел из первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 1, 2, 3 и 4, то во второй строке написаны числа 2, 3, 4, 6 и 12.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 10 чисел при $n=5$?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно одно число при $n>10$?

в) Какое наименьшее значение может принимать n, если среди чисел второй строки есть числа $2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$ и $3^2, 3^3, \ldots, 3^8$?

61. Снеговик написал ряд натуральных чисел от 1 до 2025. Затем он зачеркнул каждое второе число, начиная слева, а последнее незачеркнутое число перенес в начало ряда. Затем повторил операцию: зачеркнул каждое второе число, начиная слева, а последнее незачеркнутое число перенес в начало ряда. И так далее до тех пор, пока не останется ровно два числа.

а) Может ли после очередной операции остаться 253 числа?

б) Может ли после очередной операции остаться 64 числа?

в) Чему равна сумма последних двух незачеркнутых чисел?

62. Мороз Иванович написал на доске несколько (более одного) попарно различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 6 чисел, сумма которых равна 71?

б) Может ли на доске быть 9 чисел, сумма которых равна 71?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 7000?

63. На доске написано число 11. Раз в минуту Петя дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске. Таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2025?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел равняться 121?

в) Через какое наименьшее количество минут на доске может появится число 891?

64. На доске написаны цифры 111111222222 (шесть 1 и шесть 2). Марина составила из этих двенадцати цифр 5 попарно различных натуральных чисел, каждое из которых не кратно 3.

а) Может ли среди составленных Мариной чисел быть ровно два четырехзначных?

б) Может ли быть среди составленных Мариной чисел быть хотя бы одно шестизначное?

в) Пусть K — наибольшее из составленных Мариной чисел. Найдите наибольшее значение, которое может принимать K.

65. На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное значение k.

66. На доске написано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел из записанных является целым числом.

а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 567 и 1414?

б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом другого, если среди записанных на доске чисел есть число 567?

в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число n и его квадрат n^2. Найдите наименьшее возможное значение n.