1. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

2. Два игрока ходят по очереди. Перед началом игры у них есть поровну горошин. Ход состоит в передаче сопернику любого числа горошин. Не разрешается передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто-то в этой партии передавал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход по правилам, считается проигравшим. Начинающий или его соперник победит в этой игре, как бы ни играл партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) у каждого по две горошины;

б) у каждого по три горошины;

в) у каждого по N горошин.

3. Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть

а) 34;

б) 35;

в) 56 игр?

4. Леша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Если Гриша правильно называет число, или же одну цифру называет правильно, а в другой ошибается не более чем на единицу, то Леша отвечает «тепло»; в остальных случаях Леша отвечает «холодно». (Например, если задумано число 65, то, назвав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услышит в ответ «тепло», а в остальных случаях услышит «холодно».)

а) Покажите, что нет способа, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 18 попыток.

б) Придумайте способ, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 24 попытки (какое бы число ни задумал Леша).

в) А за 22 попытки получится?

5. У Лены три набора, в каждом из которых одинаковое количество ручек (больше 1). У Юли несколько (больше 1) наборов ручек, по 5 штук в каждом.

а) При каком количестве наборов у Юли, количество всех ручек у Лены нечетно, если всего у девочек 105 ручек?

б) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в 12 наборов по 12 ручек в каждом?

в) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в k наборов по k ручек в каждом ($k > 3$)?

6. Группа психологов разработала тест, пройдя который, каждый человек получает оценку — число Q — показатель его умственных способностей (чем больше Q, тем больше способности). За рейтинг страны принимается среднее арифметическое значений Q всех жителей страны.

а) Группа граждан страны A эмигрировала в страну B. Мог ли при этом у обеих стран вырасти рейтинг?

б) После этого группа граждан страны B (в числе которых могут быть и бывшие эмигранты из A) эмигрировала в страну A. Возможно ли, что рейтинги обеих стран опять выросли?

в) Группа граждан страны A эмигрировала в страну B, а группа граждан B — в страну C. В результате рейтинги каждой страны оказались выше первоначальных. После этого направление миграционных потоков изменилось на противоположное — часть жителей C переехала в B, а часть жителей B — в A. Оказалось, что в результате рейтинги всех стран опять выросли (по сравнению с теми, что были после первого переезда, но до начала второго). Может ли такое быть (если да, то как, если нет, то почему)? Предполагается, что за рассматриваемое время Q граждан не изменилось, никто не умер и не родился.

7. В школе, где учатся Поля, Маня и Дуня, есть длинный коридор вдоль одной из стен которого расположен длинный ряд из n ячеек, занумерованных натуральными числами от 1 до n, закрывающихся на замки, в которых школьники могут хранить свои личные вещи. Однажды, придя в школу в выходной день, Поля обнаружила все ячейки открытыми. Она стала обходить ряд ячеек сначала до конца, закрывая на замок каждую вторую ячейку. Достигнув конца ряда, она развернулась и снова стала закрывать на замок каждую вторую ячейку из тех, которые еще были открыты. Таким образом, Поля продолжала обходить ряд и закрывать на замок ячейки до тех пор, пока осталась незакрытой одна ячейка.

Обозначим $f(n)$ номер последней открытой ячейки. Например, если количество ячеек $n = 15$, то $f(15) = 11$, как показано на рисунке.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	1		3		5		7		9		11		13		15	←
→			3				7				11				15	
			3								11					←

а) Найдите $f(50)$.

Докажите, что:

б) не существует натурального числа n, такого что $f(n) = 2013$;

в) существует бесконечное множество натуральных чисел n, таких, что $f(n) = f(50)$.

8. Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

а) В мешке находятся 1 желтый, 1 зеленый и 2 красных шара. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют одним шаром третьего цвета. Этот процесс продолжают до тех пор, пока все оставшиеся шары в мешке не окажутся одного цвета (возможно, что при этом в мешке останется один шар) Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке?

б) В мешке 3 желтых, 4 зеленых и 5 красных шаров. Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке в конце после применения описанной в предыдущем пункте процедуры?

в) В мешке находятся 3 желтых, 4 зеленых и 5 красных шаров. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют двумя шарами третьего цвета. Можно ли, применяя эту процедуру многократно, добиться того, чтобы в мешке оказались шары одного цвета? Если можно, то какого цвета эти шары?

9. У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него не оказалось 100 кучек по одному камешку.

а) возможно ли, что в какой-то момент в каких-то 30 кучках было ровно 60 камешков;

б) возможно ли, что в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

в) мог ли Костя действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков?

10. Рассматривается набор гирек, масса каждой из которых — целое число граммов, а общая масса всех гирек равна 500 граммам. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее массу, выраженную целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирек набора и притом единственным образом (тело кладется на одну чашу весов, гирьки — на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирек на другие той же массы, считаются одинаковыми).

а) Является ли правильным набор, состоящий из 167 гирек массой по одному грамму, одной гирьки массой 165 граммов и одной гирьки массой 168 граммов?

б) Приведите пример правильного набора, в котором не все гирьки по одному грамму.

в) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гирька участвует в этих наборах неодинаковое число раз.)

11. а) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере две трети задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Известно также, что по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

б) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на три четверти?

в) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на семь девятых?

12. На шести елках сидят шесть сорок — по одной на каждой елке. Елки растут в ряд с интервалом в 10 м. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении.

а) Могут ли все сороки собраться на одной елке?

б) А если сорок и елок семь?

в) А если елки стоят по кругу?

13. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

14. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

15. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

16. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

17. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

18. Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

19. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

20. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

21. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальные поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

22. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли эта разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

23. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

24. За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

25. Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму — целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма — это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}$. Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов — различные целые числа.

а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?

б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?

в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

26. После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство (*быть может, все — Решу ЕГЭ*). На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

27. На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

28. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

29. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

30. В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

31. Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка [23; 84]. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?

б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?

в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

32. На каждой из 28 костей домино написаны два целых числа, не меньших 0 и не больших 6 так, что они образуют все возможные пары по одному разу (0-0, 0-1, 0-2 и так далее до 6-6).

Все кости домино разложили на несколько кучек и для каждой кучки подсчитали сумму всех чисел на костях, находящихся в этой кучке. Оказалось, что полученные суммы образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Могло ли быть 7 кучек?

б) Могло ли быть 9 кучек?

в) Какое наибольшее количество кучек могло быть?

33. В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17).

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?

б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?

в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

34. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, больше 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

35. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

36. Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?

в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

37. Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

б) Могло ли значение S быть равным 5?

в) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные работы писали 10 студентов?

38. Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В конце Наташа сделала на 1001 фотографию больше, чем Маша.

а) Могло ли это произойти за 7 дней?

б) Могло ли это произойти за 8 дней?

в) Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 40 фотографий?

39. Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

40. Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

41. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

42. Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа — n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за все время сделала суммарно на 1615 фотографий больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 5 дней?

б) Могли ли они фотографировать в течение 6 дней?

в) Какое наибольшее суммарное количество фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 30 фотографий?

43. У Вовы есть набор из n грузиков попарно различных натуральных масс в граммах и чашечные весы, которые находятся в равновесии, если на каждой из двух их чаш лежат грузики с одинаковыми суммарными массами. Известно, что, какие бы два из них ни положили на одну чашу весов, всегда можно положить на другую чашу один или несколько из оставшихся грузиков так, что весы уравновесятся.

а) Может ли у Вовы быть ровно 6 грузиков, среди которых есть грузик массой 5 г?

б) Может ли у Вовы быть ровно 5 грузиков?

в) Известно, что среди грузиков Вовы есть грузик массой 1 г. Какую наименьшую массу может иметь самый тяжёлый грузик Вовы?

44. Склад представляет собой прямоугольный параллелепипед с целыми сторонами, контейнеры — прямоугольные параллелепипеды с размерами 1×1×3 м. Контейнеры на складе можно класть как угодно, но параллельно границам склада.

а) Может ли оказаться, что полностью заполнить склад размером 120 кубометров нельзя?

б) Может ли оказаться, что на склад объемом 100 кубометров не удастся поместить 33 контейнера?

в) Пусть объем склада равен 800 кубометров. Какой процент объема такого склада удастся гарантировано заполнить контейнерами при любой конфигурации склада?

45. Агата добиралась от дома до института на своем автомобиле с постоянной скоростью 100 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причем путь до дома занял у нее больше времени, чем путь до института.

а) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки составить 90 км/ч?

б) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час?

в) Какое наименьшее целое число километров в час могла составлять ее средняя скорость за эти две поездки?

46. В ящике лежат 73 овоща, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей , масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 988 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1030 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 11 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

47. В ящике лежат 68 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей , масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 944 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1016 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 15 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

48. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждые из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество чисел меньше, чем в предыдущий день.

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 8. Может ли n быть больше 7?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 4, среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4,5?

в) Известно, что $n = 4$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

49. а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n^2 + 2n$ оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа

50. Петя играет солдатиками из двух разных наборов. В первом наборе солдатиков меньше, чем во втором, но больше чем 46. А всего солдатиков у Пети меньше 111. Петя знает, что может построить колонну по несколько солдатиков в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдатиков, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдатиков из разных наборов.

а) Сколько солдатиков может быть в первом наборе и сколько во втором? Приведите один пример.

б) Может ли Петя построить колонну указанным способом по 13 солдатиков в ряд?

в) Сколько всего солдатиков может быть у Пети? Укажите все возможные варианты.

51. Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 или 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n = 14$?

б) Могли ли все её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n = 19$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n = 24$?

52. В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

53. По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы 2 мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое количество конфет, а у любых двух девочек — разное. По команде каждый отдал соседу справа одну третью или одну четвертую своих конфет. После этого у любых двух мальчиков стало разное количество конфет, а у любых двух девочек — одинаковое. Известно, что каждый отдал натуральное число конфет.

а) Возможно ли, чтобы мальчиков было столько же, сколько и девочек?

б) Могло ли быть ровно 4 мальчика?

в) Могло ли быть ровно 10 мальчиков?

54. По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы два мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое число конфет, а у любых двух девочек — разное. По команде каждый отдал соседу справа четверть своих конфет. После этого у любых двух девочек оказалось одинаковое число конфет, а у любых двух мальчиков — разное. Известно, что каждый из детей отдал натуральное число конфет.

а) Может ли мальчиков быть ровно столько же, сколько девочек?

б) Может ли мальчиков быть больше, чем девочек?

в) Пусть девочек вдвое больше, чем мальчиков. Может ли у всех детей суммарно быть 328 конфет?

55. За прохождение каждого уровня платной сетевой игры можно получить от одной до трех звезд. При этом со счета участника игры списывается 75 рублей при получении одной звезды, 60 рублей — при получении двух звезд и 45 рублей при получении трех звезд. Миша прошел несколько уровней игры подряд.

а) Могла ли сумма на его счете уменьшиться при этом на 330 рублей?

б) Сколько уровней игры прошел Миша, если сумма на его счете уменьшилась на 435 рублей, а число полученных им звезд равно 13?

в) За пройденный уровень начисляется 5000 очков при получении трех звезд, 3000 — при получении двух звезд и 2000 — при получении одной звезды. Какую наименьшую сумму (в рублях) мог потратить на игру Миша, если он набрал 50 000 очков, получив при этом 32 звезды?

56. Группа школьников отправилась в поход. Каждый из группы взял либо удочку, либо корзинку, при этом возможно, что кто-то мог взять и удочку, и корзинку. Известно, что девочек, взявших удочки, не более $\frac{2}{9}$ от общего числа школьников, взявших удочку, а девочек, взявших корзинки, не более $\frac{1}{3}$ от общего числа школьников, взявших корзинки.

а) Могло ли быть в группе 11 девочек, если дополнительно известно, что всего было 26 школьников?

б) Какое наибольшее количество девочек могло быть среди школьников, если дополнительно известно, что всего было 26 школьников?

в) Какую наименьшую долю могли составлять мальчики, если в группе может быть любое число школьников?

57. Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 руб., на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 руб., из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 руб., средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 руб., а средняя цена книг без бирки — 226 руб. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 руб., а средняя цена книг без бирки — 210 руб. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

58. Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 80 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 5 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 103 рубля, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 67 рублей, а средняя цена книг без бирки — 157 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 70 рублей, а средняя цена книг без бирки — 146 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

59. На психологический тренинг пришли m человек. В начале работы психолог попросил каждого пришедшего написать записку с вопросом к любому одному из других участников. После этого в группу A были отобраны те, кто получил не более 1 вопроса.

а) Какое наибольшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 100$?

б) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 144$?

в) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 97$, а в группу A вошли те, кто не получил ни одного вопроса, и половина тех, кто получил ровно один вопрос? (Если ровно один вопрос получило нечетное число человек, то берется наибольшее число, не превосходящее половину.)

60. В результате опроса выяснилось, что примерно 45% опрошенных предпочитают кофе чаю (число 45 получено с помощью округления до ближайшего целого числа).

а) Могло ли участвовать в опросе ровно 24 человека?

б) Могло ли участвовать в опросе менее 24 человек?

в) Какое наименьшее число человек могло участвовать в опросе?

61. На сайте выложено k видеоуроков по математике продолжительностью ровно 1 мин., 2 мин., 3 мин., …, k мин. Виктор хочет за несколько дней посмотреть их все ровно по одному разу, затрачивая на это ровно полчаса каждый день. (Смотреть видеоуроки можно в любом порядке, но обязательно полностью).

а) Возможно ли это при $k = 15$?

б) Возможно ли это при $k = 10$?

в) Найдите все натуральные k, при которых это возможно.

62. На длинной лавочке сидят в ряд 50 человек, из них ровно 44 Владимира. Каждый загадывает желание, но сбывается оно только у тех, кто сидит между двумя Владимирами.

а) Какое наименьшее количество желаний может исполниться?

б) Может ли исполниться ровно 38 желаний?

в) Какое наибольшее количество желаний может исполниться?

63. В течение k дней Оля каждый день выписывала в тетрадь натуральные числа, каждое из которых меньше 21. При этом каждый день, начиная со второго, сумма выписанных за день чисел была меньше, чем в предыдущий день, а количество чисел — хотя бы на 3 больше.

а) Может ли k равняться 8?

б) Может ли k равняться 154, если сумма чисел, записанных в первый день, не больше 600?

в) Известно, что сумма чисел, выписанных в первый день, равна 300. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех выписанных за k дней чисел?

64. Петя участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный — списываются 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Петя набрал 35 баллов.

а) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?

б) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 35 вопросов?

в) На сколько вопросов Петя ответил правильно, если в викторине было 33 вопроса?

65. У Миши в копилке есть двухрублёвые, пятирублёвые и десятирублёвые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна двухрублёвая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна пятирублёвая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдется хотя бы одна десятирублёвая.

а) Может ли у Миши быть 30 монет?

б) Какое наибольшее количество монет может быть у Миши?

в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Миши?

66. Группу детей можно перевезти автобусами модели A или автобусами модели $Б$. Известно, что в автобусе модели A количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б — больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели A, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели $Б$, то все места так же будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 5 автобусов модели A?

б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе, если известно, что их больше 150.

в) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе.

67. Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

68. Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 и 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n = 14$?

б) Могли ли её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n = 19$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n = 24$?

69. На трибуне стадиона ровно 2020 болельщиков. Каждый из этих болельщиков плеснул водой ровно в одного другого болельщика.

а) Можно ли гарантированно найти на этой трибуне ровно 672 болельщика таких, что никто из них не обливал другого из этих 672 болельщиков водой?

б) Можно ли гарантированно найти на этой трибуне ровно 676 болельщиков таких, что никто из них не обливал другого из этих 676 болельщиков водой?

в) Какое наибольшее количество болельщиков можно гарантированно найти на этой трибуне таких, что никто из них не обливал другого из этой группы болельщиков водой?

70. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объемов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 2 литра воды, если сначала у него были ведра объемом 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объемом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объемы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объемами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объемом 10 литров?

в) Сначала у Бори были ведра объемами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объемом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что Боря сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер?

71. Участники конкурса на лучшую математическую задачу анонимно присылают каждый свою задачу. После публикации все участники дают оценку каждой задаче, кроме своей. В конкурсе принимают участие 6 человек. Каждый участник за лучшую по его мнению задачу дает 5 баллов, за следующую — 4 балла и так далее, за пятую — 1 балл. По каждой задаче баллы суммируются, так определяется рейтинг задачи.

а) Могут ли все рейтинги быть простыми числами?

б) Могла ли сумма четырех наибольших рейтингов быть в три раза больше суммы остальных?

в) Какова минимальная сумма третьего и четвертого рейтингов, если им дали номера в порядке невозрастания?

72. В детском оздоровительном лагере проходил праздник Нептуна, в котором участвовало ровно 2019 детей. Каждый из этих 2019 участников плеснул водой ровно в одного другого участника.

а) Можно ли гарантированно найти 670 участников таких, что никто из них не обливал другого из этих 670 участников?

б) Можно ли гарантированно найти 675 участников таких, что никто из них не обливал другого из этих 675 участников?

в) Какое наибольшее количество участников можно гарантированно найти на этом празднике таких, что никто из них не обливал другого из этой группы участников?

73. Гипермаркет, реализующий новогодние товары, состоит их трех отделов. В первом отделе представлены новогодние товары, цена каждого из которых меньше 100 руб. Средняя цена товаров в этом отделе равна 90 руб. Во втором отделе представлены новогодние товары, цена каждого из которых больше 100 руб. Средняя цена товаров в этом отделе равна 120 руб. Цена каждого товара в третьем отделе равна 100 руб. Средняя цена всех товаров в гипермаркете равна 110 руб., а общее число товаров равно 200. Все цены выражаются целым числом рублей.

а) Может ли в первом отделе быть столько же товаров, сколько и во втором?

б) Может ли в третьем отделе быть на 14 товаров больше чем во втором?

в) Чему может равняться наибольшая возможная при этих условиях цена товара в этом гипермаркете?

74. Тридцать пять шариков массой 1 г, 2 г, ..., 35 г разложили по двум коробкам, в каждой коробке находится хотя бы один шарик. Масса каждого шарика выражается целым числом граммов. Затем из второй коробки переложили в первую один шарик. После этого средняя масса шариков в первой коробке увеличилась на 4 г.

а) Могло ли такое быть, если первоначально в первой коробке лежали только шарики массой 3 г, 12 г и 27 г?

б) Могла ли средняя масса шариков в первой коробке первоначально равняться 12,6 г?

в) Какое наибольшее число шариков могло быть первоначально в первой коробке?

75. У Вани есть несколько пакетов с вещами, каждый из которых весит целое число килограммов. Он хочет разложить все эти пакеты, не перекладывая их содержимое, по n имеющимся у него одинаковым рюкзакам. В каждый рюкзак можно положить любое число пакетов, суммарная масса которых не превосходит m килограммов.

а) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 3, 6, 9, 12, 15, 18 и 21 кг, если $n = 3$ и $m = 29$?

б) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 2, 5, 8, 11, 14, 17 и 20 кг, если $n = 3$ и $m = 26$?

в) Какое наименьшее значение может принимать m, чтобы Ваня при $n = 4$ смог разложить таким образом девять пакетов, которые весят 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19 кг?

76. Есть четыре коробки: в первой коробке 101 камень, во второй — 102, в третьей — 103, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй — 102, в третьей — 103, а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 306 камней?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

77. Имеются три коробки: в первой — 97 камней, во второй — 104 камня, в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Может ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй — 89, в третьей — 15?

б) Может ли в третьей коробке оказаться 201 камень?

в) Известно, что в первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

78. У ювелира есть 47 полудрагоценных камней, масса каждого из которых — целое число граммов, не меньшее 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трем кучам: в первой куче n_1 камней, во второй — n_2 камней, в третьей — n_3 камней, причем $n_1 < n_2 < n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1, во второй — S_2, а в третьей — S_3.

а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?

б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$, если масса любого камня не превосходит 105 граммов?

в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k, для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$.

79. Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — целое число рублей. Если цена книги меньше 100 руб., на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 руб., из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 руб., средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 руб., а средняя цена книг без бирки — 226 руб. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 руб., а средняя цена книг без бирки — 210 руб. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

80. В школьном живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый ученик насыпает нескольким кроликам (хотя бы одному, но не всем) порцию корма. При этом первый ученик даёт порции по 100 г, второй — по 200 г, третий по 300 г, четвёртый — по 400 г, а какие-то кролики могут остаться без корма.

а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?

б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все кролики получили разное количество корма?

в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если известно, что каждый ученик засыпал корм ровно четырём кроликам и все кролики получили разное количество корма?

81. На острове живут 3 серых, 28 бурых и 29 малиновых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов оба меняют свой цвет на третий (серый и бурый оба становятся малиновыми и т. п.).

а) Может ли в некоторый момент времени на острове оказаться 15 серых, 28 бурых и 17 малиновых хамелеонов?

б) Может ли некоторый момент времени на острове оказаться 60 серых хамелеонов?

в) Какое наибольшее количество серых хамелеонов может оказаться на острове, при условии, что малиновых хамелеонов в этот момент времени ровно 2?

82. В резиденции Деда Мороза работает не менее 60 и не более 80 гномиков. Дед Мороз проводит собрание. К началу собрания пришло меньше половины гномиков (а возможно, что и никто не пришел). Спустя 10 минут после объявленного начала на собрание пришел еще один гномик.

а) Могло ли получиться так, что после этого на собрании присутствовало больше половины гномиков?

б) Возможно ли, что и до и после прихода опоздавшего гномика процент гномиков на собрании выражался целым числом?

в) Какое наибольшее целое значение мог принять процент так и не пришедших на собрание гномиков?

83. Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

а) Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 16 см на части по 1 см?

б) Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 100 см на части по 1 см?

в) За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

84. У Пети есть монеты номиналом 1, 2, 5 и 10 рублей. Каждого вида монет у него по 100 штук. Цена пирожного в рублях выражается целым числом. Петя хочет купить пирожное без сдачи, но до покупки не знает сколько оно стоит.

а) Может ли Петя выбрать дома 16 монет так, чтобы купить пирожное стоимостью не более 100 рублей?

б) Может ли Петя выбрать дома 5 монет так, чтобы купить пирожное стоимостью не более 25 рублей?

в) Какое наименьшее количество монет нужно взять Пете, если известно, что пирожное стоит не более 100 рублей?

85. В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21%.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30%, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

86. Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 22 контейнера массой 2 тонны на 14 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 17 контейнеров массой 2 тонны на 12 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увести за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 77 контейнеров массой 2 тонны?

87. На овощебазу завезли капусту. Каждый из кочанов капусты весит 1, 2 или 3 килограмма.Фермер Иван поехал на овощебазу за капустой. Его сосед Фёдор попросил купить для него столько же капусты (по массе). На овощебазе Ивану составили набор кочанов капусты, суммарная масса которых составила N кг. Нужно разделить эти кочаны поровну (по массе) между Иваном и Федором так, чтобы не пришлось резать кочаны.

а) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 20$, который невозможно разделить поровну?

б) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 24$, который невозможно разделить поровну?

в) Найдите все значения N, для которых любой набор кочанов суммарной массы N можно разделить поровну.

88. На онлайн-курсах английского языка используется одна из схем ускоренного запоминания иностранных слов.

Предлагается разделить программу обучения на n уроков продолжительностью 1, 2, 3, ..., n минут. Преподаватель курсов уверяет, что за несколько дней можно посмотреть все уроки по одному разу, выделяя на занятие ровно 15 минут каждый день. Каждый урок необходимо смотреть от начала до конца в течение дня в любой последовательности.

а) Возможно ли это при $n = 5$?

б) Возможно ли это при $n = 10$?

в) Найдите все натуральные n, при которых это возможно.

89. При проведении школьной математической олимпиады итоговая сумма баллов составляется из двух баллов за участие, 13 баллов за каждую взятую и решенную задачу и −8 баллов за каждую взятую и нерешенную задачу. Каждую задачу участник выбирает себе самостоятельно в запечатанном конверте. Число задач, предлагаемых для решения, неограниченно.

а) У одного из участников, решившего p задач и не решившего q задач, итоговая сумма оказалась равной u баллов. Найдите итоговую сумму участника, решившего $2p$ задач и не решившего $2q$ задач.

б) Известно, что итоговая сумма у двух участников оказалась одинаковой. Может ли разность между числом всех задач, взятых для решения одним участником, и числом задач, взятых для решения другим участником, делиться на 21?

в) Какое минимальное число задач надо взять, чтобы итоговая сумма оказалась равной нулю?

90. Владелица супермаркета «Новогоднее счастье от Алевтины» организовала распродажу новогодних сувениров. В течение дня покупатели приходили к кассиру, чтобы расплатиться (сумма любого платежа — четное число рублей). Каждый протягивал купюру 5000 рублей, а кассир выдавал сдачу, имея только 300 монет по 10 рублей и 500 монет по 2 рубля. По итогам дня все монеты оказались потраченными на сдачи.

а) Могло ли за день быть 250 покупателей, если все они получили равную сдачу?

б) Каким могло быть наибольшее число покупателей, если каждый получил одинаковую сдачу?

в) Для какого наибольшего числа покупателей кассир мог выдать на сдачу все монеты при любом распределении сдач, не противоречащим условию?

91. В шахматном турнире участвовали команды трех школ (по одной команде на каждую школу). Все команды имели одинаковое число игроков. При встрече двух команд каждый участник команды сыграл одну партию с членом команды соперников. За выигрыш партии команде присуждалось 2 очка, за ничью — одно очко, за проигрыш — 0 очков. Победительница встречи двух команд определялась по сумме набранных очков. После проведения всех трех встреч набранные каждой командой очки суммировались, и определялась команда-победительница турнира.

а) Могла ли команда, победившая каждую команду соперников, занять последнее место по итогам турнира?

б) Могла ли команда, победившая каждую команду соперников, не стать победителем турнира?

в) Первая команда, играя со второй командой, 2 партии проиграла и 3 партии свела вничью, а играя с третьей командой, 2 партии проиграла и 2 свела вничью. Вторая команда, играя с третьей командой, 2 партии проиграла и 4 свела вничью. Все команды набрали разное количество очков. Какое наименьшее число игроков могло быть в каждой команде и как в этом случае распределились места по итогам турнира?

92. По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы два мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет, причем у любых двух мальчиков одинаковое число конфет, а у любых двух девочек — разное. По команде каждый из детей отдает соседу справа четверть своих конфет, при этом каждый из детей отдает натуральное число конфет. После этого у любых двух девочек становится равное число конфет, а у любых двух мальчиков — разное.

а) Может ли число детей быть равным пяти?

б) Какое наименьшее число детей может стоять в круге, если суммарно у них 1020 конфет?

в) Какое наибольшее число детей может стоять в круге, если суммарно у них 1020 конфет?

93. На столе лежат 4 камня по 5 кг и 13 камней по 14 кг. Их разделили на две кучки.

а) Может ли разность масс двух этих кучек камней быть равна 6 кг?

б) Могут ли массы двух этих кучек быть равны?

в) Какая наименьшая положительная разность масс может быть у двух этих кучек камней?

94. В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 40 тонн. В некоторых контейнерах находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 40% от общего числа контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 50% от общей массы?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 60% от общей массы?

в) Какую наименьшую долю в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

95. В футбольном турнире участвовало 10 команд, при этом каждая команда играла с каждой ровно по одному разу. За победу в одной игре команде присуждается 3 очка, за ничью — одно очко, за поражение — 0.

а) Команда «Легион», участвовавшая в этом турнире, набрала 17 очков. Сколько матчей она могла завершить вничью?

б) Сколько матчей всего было завершено вничью, если сумма очков, набранных всеми командами в сумме, в 60 раз больше количества очков, набранных одной из команд?

в) Найдите наибольшее возможное число ничьих на турнире, если любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное количество очков, причем найдется команда, завершившая ровно 6 матчей вничью?

96. Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырех человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах.

а) Можно ли при этих условиях из 9 человек подготовить 3 экипажа?

б) Можно ли при этих условиях из 9 человек подготовить 4 экипажа?

в) Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей?

97. В спортивной секции занимается более 20 и менее 45 школьников. На областное соревнование было заявлено более половины ребят из секции, но потом ровно один из них отказался участвовать.

а) Могло ли получиться так, что теперь на соревнование заявлено менее половины школьников из этой секции?

б) Известно, что и до, и после отказа одного из ребят процент заявленных на соревнование выражался целым числом. Найдите все возможные значения числа занимающихся в этой секции.

в) Какое наименьшее целое значение мог принять процент заявленных спортсменов после отказа одного из школьников?

98. Лесная шахматная школа провела шахматный турнир. В нём принимали участие Волк, Лиса и Заяц. Каждый из них сыграл с каждым участником по 10 партий. За выигранную партию присуждалось 2 очка, за ничью 1 очко, за проигрыш 0 очков. После окончания турнира места распределялись по сумме очков, набранных участниками.

а) Сколько очков набрал Волк, если у него число выигранных в турнире партий равнялось числу проигранных?

б) У Лисы количество выигранных партий больше чем у Волка, а у Волка больше чем у Зайца. Может ли Заяц занять первое место, Волк — второе, а Лиса — третье?

в) Лиса заняла в турнире второе место, хотя при игре с каждым из соперников побеждала чаще, чем проигрывала. Тогда она потребовала изменить порядок подведения итогов: распределять места по разности количества выигранных и проигранных партий. Сможет ли она после этого занять первое место?

г) Может ли быть по итогам турнира у каждого участника количество выигранных партий больше, чем количество проигранных?

99. Каждый из трёх бизнесменов имеет хотя бы одну акцию типа A и типа B. Общее количество акций обоих типов у каждого бизнесмена равны соответственно n, m и k. Стоимость акций типа A выше, чем стоимость акций типа B, а общая стоимость S (руб.) всех акций у каждого бизнесмена одинаковая.

а) Может ли быть, что $n = 5$, $m = 21$, $k = 29$?

б) Может ли быть, что $n = 4$, $m = 21$, $k = 29$?

в) Найдите стоимость акции каждого типа, если $n = 11$, $m = 21$, $k = 29$, $S = 4402$.

100. В школе перед началом учебного года было сформировано несколько одиннадцатых классов, в каждом из которых количество мальчиков относилось к количеству девочек как 7 : 2 или как 2 : 7. После этого в параллель одиннадцатых классов школы приняли ещё четырёх мальчиков и трех девочек.

а) Удастся ли теперь разбить всех одиннадцатиклассников на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 5 : 4 или 4 : 5?

б) Всех одиннадцатиклассников удалось разбить на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 7 : 3 или 3 : 7. Могло ли при этом получиться ровно семь классов?

в) Всех одиннадцатиклассников удалось разбить на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 7 : 3 или 3 : 7. Было решено отправить всех одиннадцатиклассников на экскурсию группами по 90 человек, при этом одна из групп оказалась неполной. Сколько в этой группе было одиннадцатиклассников?

101. В парке n аттракционов. В воскресенье парк посетило ровно n детей. Стоимость посещения каждого аттракциона составляет 10 рублей. Каждый ребенок потратил или 30, или 160 рублей, причем не все дети потратили поровну денег (один аттракцион можно посетить много раз).

а) Могла ли выручка каждого аттракциона составить ровно 60 рублей?

б) Какое наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?

в) Пусть любые два аттракциона имеют разную выручку (возможно, нулевую). Каково наибольшее возможное количество посетивших парк детей?

102. В автохозяйстве имеются грузовики трех типов. Каждый грузовик первого типа имеет грузоподъемность 3 тонны и сделал 3 рейса, каждый грузовик второго типа имеет грузоподъемность 13 тонн и сделал 12 рейсов, каждый грузовик третьего типа имеет грузоподъемность 17 тонн и сделал 16 рейсов. Всего было сделано ровно 95 рейсов.

а) Могло ли в автохозяйстве быть 2 грузовика третьего типа?

б) Могло ли в автохозяйстве быть 4 грузовика третьего типа?

в) Сколько тонн груза максимально могло перевести автохозяйство при данных условиях?

103. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести в два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий.

а) Может ли сумма числа аудиторий в обоих корпусах быть равна 24?

б) Найдите наименьшее возможное значение суммы числа аудиторий в обоих корпусах.

в) Найдите минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменованы при этих условиях.

104. В Тридевятом царстве в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 9 рублей и золотые монеты достоинством 81 рубль. В казне находится неограниченный запас монет каждого вида.

а) Каким наименьшим количеством монет может быть выдан вклад в 2021 рубль?

б) Можно ли выдать вклад в 1955 рублей 25 монетами?

в) Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 23 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 700 рублей. Найдите эту сумму, если известно, что меньшим числом монет выдать ее невозможно.

105. Кондитерский магазин торгует тортами трех размеров: большой торт, средний торт и маленький торт (пирожное). Средний торт получается из большого торта разрезанием на 4 части, пирожное тоже получается из среднего торта разрезанием на 4 части.

а) Испекли 15 больших тортов. Некоторые из них разрезали и получили средние торты. Несколько средних тортов разрезали и получили пирожные. Может ли всего получиться 80 тортов разных размеров? А 81 торт?

б) Большой торт стоит 100 рублей, средний торт стоит 30 рублей, пирожное стоит 10 рублей. Испекли несколько больших тортов. Как их разрезать, чтобы всех тортов разных размеров стало ровно в 7 раз больше, а их общая стоимость была максимальной?

в) После разрезания испеченных тортов оказалось, что получилось одинаковое количество тортов всех трех типов. Какое наименьшее возможное количество больших тортов испекли?

106. В деревне было поле, площадь которого менее 100 га. Третья часть поля принадлежала фермеру, а остальная площадь была поделена на несколько равных участков, принадлежавших односельчанам, причем площадь каждого участка выражалась натуральным числом гектаров. Фермер купил в городе несколько мешков семян по 25 кг в каждом мешке. Несколько мешков он оставил себе, а остальные распродал по 7 кг семян односельчанам, имевшим участки.

а) Чему равна площадь всего поля?

б) Сколько мешков семян купил фермер?

в) Сколько односельчан имели участки?

107. В турнире по футболу на кубок Содружества участвовали 6 команд из России и 12 команд из других стран СНГ. При победе в матче команда получала 2 очка, в случае ничьей 1 очко, при поражении 0 очков. После окончания турнира оказалось, что все команды набрали разное количество очков. При этом сумма очков российских команд была равна сумме очков всех команд из других стран.

а) Могли ли все российские команды не проиграть ни одного матча с командами из других стран?

б) Могли ли российские команды побеждать во всех матчах с командами из других стран?

в) Может ли в тройке призеров турнира не быть ни одной российской команды?

108. В новогоднюю ночь Дед Мороз и Баба Яга устроили математическое соревнование. Дед Мороз написал на волшебной доске число 8 (по количеству своих оленей), а затем каждую минуту дописывал новое число, которое получалось либо удвоением какого-то из уже написанных чисел, либо сложением двух любых имеющихся на доске чисел.

а) Могло ли на доске появиться число 2028?

б) Могла ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 96?

в) Через какое наименьшее время (в минутах) на доске могло появиться число 896?

109. На прилавке лежит 95 товаров, цена каждого выражается целым числом рублей. Средняя цена товаров, которые дешевле 2000 рублей, равна 1960 рублей, а средняя цена товаров, которые дороже 2000 рублей, равна 2050 рублей. Средняя цена всех 95 товаров равна 2000 рублей.

а) Может ли товаров ценой 2000 рублей быть ровно 50?

б) Может ли товаров ценой более 2000 рублей быть в два раза меньше, чем товаров ценой менее 2000 рублей?

в) Какую наибольшую цену (в рублях) может иметь товар на прилавке?

110. Дядя Вахид организует грандиозное застолье по случаю свадьбы племянника. Из своего сундука он выделил ровно 800 золотых монет на главные атрибуты праздника.

В прайс-листе лучшего тамады района есть три позиции:

— Шампуры с бараньим шашлыком (цена — 15 монет за штуку);

— Резные рога для долгих тостов (цена — 28 монет за штуку);

— Ручные кавказские орлы для красивых фотографий (цена — 71 монета за штуку).

Дядя Вахид чтит традиции, поэтому каждого пункта нужно заказать хотя бы по одному. Кроме того, как гласит неписаный закон гостеприимства: количество шампуров шашлыка должно быть строго больше количества рогов для тостов (чтобы гости сначала покушали, а потом пили), а количество рогов — строго больше количества орлов (иначе птицы перекричат всех во время тоста).

а) Мог ли дядя Вахид заказать ровно 40 предметов суммарно?

б) Мог ли дядя Вахид заказать ровно 30 предметов суммарно?

в) Какое наименьшее количество шампуров шашлыка может заказать дядя Вахид, чтобы не нарушить древние законы гостеприимства?

111. На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее –32. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных — на 8. Известно, что самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 1?

б) Может ли количество синих карт быть равным 40?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

112. На столе лежит стопка из красных и синих карт, на каждой из которых написано целое число, большее –80. При этом числа на картах одного цвета различны. Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных — чётные числа. Известно, что самое большое число на красной карте равно удвоенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество красных карт быть равным 5?

б) Может ли количество красных карт быть равным 200?

в) Какое наибольшее количество красных карт может быть на столе?