

1. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ADP , проведённую из вершины D , если известно, что сторона квадрата равна 1.
2. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.
3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE .
4. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$.
5. Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α , $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.
6. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .
7. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF ?
8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.
9. Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.
10. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT , если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.
11. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и $BC = 93$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB .
12. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

13. Площадь трапеции $ABCD$ равна 60, а одно из оснований трапеции втрое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O ; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.
14. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 10$ и $BC = 9$. На прямой BC взята точка M , причём $AM = 10$. Найдите площадь треугольника AMB .
15. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ABP , проведённую из вершины A , если известно, что сторона квадрата равна 1.
16. Дан треугольник ABC , площадь которого равна 55. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE — равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABE , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.
17. Дан треугольник ABC . Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE , площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$.

18. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N таким образом, что $DM = 4$, при этом P — точка пересечения прямых BN и CM . Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N .

19. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 2$. Найдите BC если $AB = 12$.
20. Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\frac{15}{17}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

21. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

22. На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , взята точка E , удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE , если $BC = 6$, $AC = 4$.

23. Расстояния от точки M , расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 3 и 6. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 48. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри угла.

24. Из вершин острых углов B и C треугольника ABC проведены две его высоты — BM и CN , причем прямые BM и CN пересекаются в точке H . Найдите угол BHC , если известно, что $MN = \frac{1}{3}BC$.

25. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M .

Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 12$.

26. Биссектриса острого угла A трапеции $ABCD$ пересекает боковую сторону CD в точке T , а продолжение основания BC трапеции в точке K так, что $ABKD$ — параллелограмм и $TD : TC = 4 : 1$.

а) Докажите, что прямые AK и BD перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если ее сторона $AB = 8$ и $\angle B = 120^\circ$.

27. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана BE . Точки M и N являются ортогональными проекциями на сторону AB точек D и E соответственно, причем

$$\frac{AM}{MB} = \frac{9}{1}, \quad \frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}.$$

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите отношение $\frac{AD^2}{BE^2}$.

28. В трапеции $ABCD$ с нижним основанием AD площади треугольников ABD и BDC равны соответственно 12 и 4, а точка G является серединой BD . Ниже прямой AD выбрана точка E , $AE = BD$, а на отрезке EC выбрана точка F такая, что CF в 4 раза короче CE .

а) Докажите, что угол BFG равен 90° .

б) Найдите длину отрезка BD , если дополнительно известно, что $\angle CFG = 75^\circ$, а $\angle BGC = 15^\circ$.

29. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1.

а) Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм или трапеция.

б) Найдите BC , если площадь всего четырехугольника не превосходит 4, а $AD = 3$.

30. Биссектрисы углов C и D четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Диагональ BD разбивает отрезок KC в отношении $2 : 1$, считая от вершины C . При этом площадь треугольника ACD в два раза больше площади треугольника AKD .

а) Докажите, что угол CKD прямой.

б) Найдите BK , если $BC = 6$.

31. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

32. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC заданы соответственно точки M и N такие, что $AM = MB$, $BN : NC = 1 : 2$. Отрезки CM и AN пересекаются в точке O .

а) Докажите, что расстояние от точки O до прямой AC равно $\frac{2}{5}BH$, где BH — высота треугольника ABC .

б) Найдите расстояние от точки O до прямой AC , если $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$, $AC = 8$.

33. В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC — тупоугольный.

б) Найдите длину стороны AC , если $AB = 4$.