

1. В треугольнике  $ABC$ ,  $AB = 15$ ,  $BC = 7$ ,  $CA = 9$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  причем  $BD : DC = 5 : 7$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$  касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

2. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

3. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

4. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

5. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне  $BC$ . Известно, что  $BC = 19$ . Найдите сторону  $AB$ .

6. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 25$ ,  $AC = 7$  и  $BC = 24$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$ , а на отрезке  $AD$  — точка  $O$ , причем  $CD = 8$  и  $AO = 3OD$ . Окружность с центром  $O$  проходит через точку  $C$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до точки пересечения этой окружности с прямой  $AB$ .

7. Радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен 13,  $\cos \angle BAC = -\frac{5}{13}$ , высота, проведенная к стороне  $BC$ , равна 5. Найдите длину той хорды  $AM$  описанной окружности, которая делится пополам стороной  $BC$ .

8. Точки  $D$  и  $E$  — основания высот непрямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенных из вершин  $A$  и  $C$  соответственно. Известно, что  $\frac{DE}{AC} = k$ ,  $BC = a$  и  $AB = b$ . Найдите сторону  $AC$ , если известно, что: а) треугольник остроугольный, б) угол  $B$  тупой.

9. В треугольнике  $ABC$ ,  $AB = 7$ ,  $BC = 9$ ,  $CA = 4$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  причем  $BD : DC = 1 : 5$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ADC$  и  $ADB$  касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

10. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина  $C$ , на другой — основание  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = 10$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника  $ABC$ .

11. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка  $C$ , а на другой — точки  $A$  и  $B$ , причем треугольник  $ABC$  — равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

12. В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 9$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

13. В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 7$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

14. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно  $\frac{5}{6}$ .

15. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен  $\frac{3}{5}$ .

16. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно  $\frac{7}{24}$ .

17. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно  $\frac{15}{8}$ .

18. Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A$ ,  $M$  и  $B$  на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника  $VMC$ .

19. Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A$ ,  $M$  и  $B$  на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника  $VMC$ .

20. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 15$  и  $BC = 8$ . С центром в вершине  $B$  проведена окружность  $S$  радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол  $BAC$  и касающейся окружности  $S$ .

21. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 5$  и  $BC = 12$ . С центром в вершине  $B$  проведена окружность  $S$  радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол  $BAC$  и касающейся окружности  $S$ .

22. Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

23. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

24. Точка  $O$  — центр правильного шестиугольника  $ABCDEF$  со стороной 7. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников  $BOD$ ,  $DOF$  и  $BOF$ .

25. Точка  $O$  — центр правильного шестиугольника  $ABCDEF$ , в котором  $AC = 10,5$ . Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников  $AOB$ ,  $COD$  и  $EOF$ .

26. Продолжение биссектрисы  $CD$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке  $E$ . Окружность, описанная около треугольника  $ADE$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $F$ , отличной от  $A$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $AC = 4$ ,  $AF = 2$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ .

27. Продолжение биссектрисы  $CD$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке  $E$ . Окружность, описанная около треугольника  $ADE$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $F$ , отличной от  $A$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $AC = 6$ ,  $AF = 3$ , угол  $BAC$  равен  $45^\circ$ .

28. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $D$  — отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах. Известно, что  $DB : DC = 1 : 3$ . Найдите угол  $A$ .

29. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $D$  — отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах. Известно, что  $DB : DC = 2 : 3$ . Найдите угол  $A$ .

30. Внеписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух внеписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

31. Стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  равны соответственно 26 и 14,5, а его высота  $BD$  равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $BCD$ .

32. Стороны  $KM$  и  $MN$  треугольника  $KMN$  равны соответственно 30 и 25, а его высота  $MH$  равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $KMH$  и  $MNH$ .

33. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух его сторон.

34. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 15$ ,  $AC = 9$  и  $BC = 12$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$ , а на отрезке  $AD$  — точка  $O$ , причем  $CD = 4$  и  $AO = 3OD$ . Окружность с центром  $O$  проходит через точку  $C$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до точки пересечения этой окружности с прямой  $AB$ .

35. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $BMC$ .

36. На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$  и  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

37. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне  $BC$ . Известно, что  $BC = 11$ . Найдите сторону  $AB$ .

38. Окружность, вписанная в треугольник  $KLM$ , касается сторон  $KL$ ,  $LM$  и  $MK$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно.

а) Докажите, что  $KC = \frac{KL + KM - LM}{2}$ .

б) Найдите отношение  $BL : BM$ , если известно, что  $KC : CM = 3 : 2$  и  $\angle MKL = 60^\circ$ .

39. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $K$ ,  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что  $AN = \frac{AB + AC - BC}{2}$ .

б) Найдите отношение  $AK : KB$ , если известно, что  $AN : NC = 4 : 3$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

40. Из середины катета прямоугольного треугольника на его гипотенузу опущен перпендикуляр, длина которого равна 1. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если длина одного из его катетов равна 4.

41. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $BA$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ .

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник  $BEF$ , лежит на окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если  $AB = BC$ ,  $BE = 13$ ,  $EF = 10$ .

42. В треугольнике  $ABC$   $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle C = 25^\circ$ ,  $BD$  — диаметр описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Продолжение высоты  $BH$  пересекает окружность в точке  $L$ .

а) Докажите, что  $\angle ACD = \angle CAL$ .

б) Найдите длину отрезка  $DL$ , если радиус описанной окружности равен  $4\sqrt{3}$ .

43. Точка  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Луч  $BI$  пересекает описанную около треугольника  $ABC$  окружность в точке  $N$ . Известно, что угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что  $N$  — центр окружности, описанной около треугольника  $AIC$ .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если известно, что  $IN = 1$ .

44. В треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — центр описанной окружности. Прямая  $BD$ , перпендикулярная прямой  $AO$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ , а описанную вокруг треугольника  $ABC$  окружность — в точке  $T$ .

а) Докажите, что  $AC$  — биссектриса угла  $TCB$ .

б) Найдите  $CD$ , если  $AB = 84$ ,  $AC = 98$ .

45. Окружность с центром  $O$ , вписанная в прямоугольный треугольник  $ABC$ , касается гипотенузы  $AB$  в точке  $M$ , а катета  $AC$  — в точке  $N$ ,  $AC < BC$ . Прямые  $MN$  и  $CO$  пересекаются в точке  $K$ .

а) Докажите, что угол  $CKN$  в два раза меньше угла  $ABC$ .

б) Найдите  $BK$ , если  $BC = 2\sqrt{2}$ .

46. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  выбрана точка  $M$ , причем  $\angle BAM = 30^\circ$ . Прямая  $AM$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$  в точке  $N$ , отличной от  $A$ . Известно, что  $\angle BNC = 105^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{6}$ .

а) Доказать, что  $BN : NC = 1 : \sqrt{2}$ .

б) Найдите длину отрезка  $AN$ .