А. Ларин: Тренировочный вариант № 123.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Дано уравнение $\cos 3\pi x + \sin\dfrac{3\pi(x+1)}{2} = 4\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi x}{2} - 1\right)$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите его корни из отрезка $[-7; -3]$.

2. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Через точки B, D_1, F_1 проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна плоскости DCC_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если известно, что $AB = 1$, $AA_1 = 3$.

3. Решите неравенство $\dfrac{7 - 71\cdot 3^{-x}}{3^x + 10\cdot 3^{-x} - 11} \leqslant 1$.

4. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме длин катетов.

б) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CH. Найдите сумму длин радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACH и BCH, если известно, что $CH = \sqrt{5}$.

5. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (|y| - 7)^2 = 9, \\ (x-9)^2 + (y-2)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. а) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого является точным квадратом, а третья часть — точным кубом.

б) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого является точным кубом, а третья часть — точным квадратом.

в) Существует ли натуральное число, половина которого является точным квадратом, третья часть — точным кубом, а пятая часть — точной пятой степенью?