При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Дана трапеция с диагоналями равными 5 и 12. Сумма оснований равна 13.
а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.
б) Найдите площадь трапеции.

2. Сумма оснований трапеции равна 17, а её диагонали равны 8 и 15.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

3. Дана трапеция с диагоналями равными 5 и 12. Сумма оснований равна 13.
а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.
а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.
б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

5. Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.
а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.
б) Найдите AB, если $BC = \sqrt{21}$ и $AC = 3$.

6. В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 1$.

7. В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = \sqrt{3}$.

8. В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3$.

9. В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O. Эта окружность касается стороны MN в точке A. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.
а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO.
б) Найдите длину стороны MN, если $LA = 3$.

10. В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM, угол ACB равен 30°. Точка H лежит на отрезке BM. В треугольнике ACM проведена высота MQ. Прямые MQ и AH пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла HAC.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CFM, если $AB = 10$.

11. В треугольнике ABC угол ACB равен 30°, отрезки AH и AM — высота и медиана соответственно, причем точка H лежит на отрезке BM. Отрезок MQ — высота треугольника AMC, а прямые AH и MQ пересекаются в точке F. Известно, что AM — биссектриса угла CAH.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите площадь треугольника CMF, если $AB = 8$.

12. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом DAB. В нем опущены высоты BP и BQ на стороны AD и CD соответственно. На стороне AD отмечена точка M так, что $AM = BP$. Известно, что $AB = BQ$.
а) Докажите, что $BM = PQ$.
б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 12$, $AB = BQ = 15$.

13. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD из вершины B проведены высоты BP и BQ, причем точка P лежит на стороне AD, а точка Q — на стороне CD. На стороне AD отмечена точка M. Известно, что $AM = BP$, $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM = BP = 21$, $AB = BQ = 29$.

14. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M. Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABM, касается прямых BC и OM.

а) Докажите, что $AB \perp BD$.

б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь четырехугольника $KODM$, если $OM = 2$.

15. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла, AM и CN — биссектрисы треугольников ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что прямые AM и CN перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN, если $BC = 21$ и $\sin\angle ABC = \frac{2}{5}$.

16. В ромбе $ABCD$ точки K и L — середины сторон BC и CD соответственно. Прямые AK и AL пересекают диагональ BD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что $S_{APQ} = S_{BKP} + S_{DLQ}$.

б) Известно, что в пятиугольник $CKPQL$ можно вписать окружность. Найдите ее радиус, если сторона ромба $ABCD$ равна $6\sqrt{5}$.

17. В ромбе $ABCD$ точки K и L — середины ребер BC и CD соответственно. Прямые AK и AL пересекают диагональ BD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что $S_{APQ} = S_{BKP} + S_{DLQ}$.

б) Известно, что в пятиугольник $CKPQL$ можно вписать окружность. Найдите ее радиус, если сторона ромба $ABCD$ равна $12\sqrt{5}$.

18. Дан ромб $ABCD$. На диагонали AC отмечены точки M и N, так что $AM = NM = NC$. Прямая BM пересекает сторону AD в точке P, а прямая BN пересекает сторону CD в точке Q.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $BPDQ$ равна площади треугольника ADC.

б) Найдите BD, если известно, что $AC = 2\sqrt{3}$ и около пятиугольника $MNQDP$ можно описать окружность.

19. Дан ромб $ABCD$. На диагонали AC отмечены точки M и N, так что $AM = NM = NC$. Прямая BM пересекает сторону AD в точке P, а прямая BN пересекает сторону CD в точке Q.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $BPDQ$ равна площади треугольника ADC.

б) Найдите BD, если известно, что $AC = 2\sqrt{5}$ и около пятиугольника $PMNQD$ можно описать окружность.