А. Ларин. Тренировочный вариант № 483.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $2\sin^2 5x - \operatorname{tg}^2 5x = 0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 8, на ребре AA_1 взята точка M так, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{3}$. На ребре D_1C_1 взята точка N так, что $\frac{D_1N}{NC_1} = \frac{1}{3}$.

а) Докажите, что прямые MB_1 и CN перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой CN.

3. Решите неравенство: $3^x \cdot \log_3 x - \sqrt{3} \geqslant \log_3 x^{\sqrt{3}} - 3^x.$

4. Семен Семенович хочет положить определенную сумму денег в разные банки под некоторые проценты. $\frac{4}{5}$ этой суммы он помещает на вклад «Райский» под r% годовых, а оставшуюся часть денег на вклад «Южный» под q% годовых (проценты начисляются в конце года и добавляются к сумме вклада). Через год сумма вкладов (с учетом процентов) равна 212 000 рублей, а через два года — 224 800 рублей. Если бы Семен Семенович изначально $\frac{4}{5}$ суммы положил на вклад «Южный», а оставшиеся средства на вклад «Райский», то через год сумма вкладов (с учетом добавленных процентов) была бы равна 218 000 рублей. Чему в этом случае была бы равна сумма вкладов через 2 года?

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, K, P — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно и являются вершинами четырехугольника $MNKP$. AC и BD — диагонали четырехугольника $ABCD$. Точка O — точка пересечения отрезков AC и BD.

а) Докажите, что четырехугольник $MNKP$ — параллелограмм.

б) Найдите диагонали MK и PN четырехугольника $MNKP$, если $AC = 4$, $BD = 6$, $\angle AOB = 60^\circ$.

6. Даны два уравнения

$$2ax^2 + (a+2)x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{4-a^2} = \frac{1}{\sqrt{x-2}+2}.$$

Найдите все значения параметра $a \neq \pm 2$, при которых число различных корней первого уравнения на одно больше числа различных корней второго уравнения.

7. Натуральные числа k, l, m и n удовлетворяют условию $k > l > m > n$.

а) Может ли $k+l+m+n=20$, если $k^2-l^2+m^2-n^2=40$?

б) Может ли $k+l+m+n=37$, если $k^2-l^2+m^2-n^2=37$?

в) Пусть $k+l+m+n=1400$ и $k^2-l^2+m^2-n^2=1400$. Найдите количество возможных различных значений k.