А. Ларин. Тренировочный вариант № 470.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos^2 x = \cos x \cdot 2^{\log_2(-\cos x)}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с диагоналями $AC = 2$, $BD = \sqrt{2}$, пересекающимися в точке O. Ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 45°, а вершина A_1 ортогонально проецируется в точку O. Через точку A_1 перпендикулярно боковым ребрам проходит плоскость α.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α — квадрат.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит объем призмы.

3. Решите неравенство $\dfrac{8^{x+\frac{2}{3}} - 9\cdot 4^{x+\frac{1}{2}} + 13\cdot 2^x}{4^{x+\frac{1}{2}} - 9\cdot 2^x + 4} \leqslant 2^{x+1} - \dfrac{1}{2^x - 2} + \dfrac{3}{2^{x+1} - 1}$.

4. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 720 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

− каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

− в июле 2027, 2028 и 2029 долг остаётся равным 720 тыс. руб.;

− выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

− к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

5. К двум окружностям радиусов 2 и 1 проведены внешние касательные AB и CD, причем точки A и C лежат на меньшей окружности, а точки B и D — на большей. Прямая AD пересекает меньшую окружность в точке N, а большую — в точке M.

а) Докажите, что $AN = DM$.

б) Найдите площадь треугольника ABD, если дополнительно известно, что точки M и N делят отрезок AD на три равные части.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a + 2x)\sqrt{1 + 2xa} = a^2 + a + 3ax + 2x + 2x^2$$

имеет ровно два корня.

7. Бесконечная непостоянная арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ состоит из натуральных чисел.

а) Если $a_4 = 12$, может ли a_{42} делиться на 11?

б) Может ли быть $a_1 = 13$, если a_{73} и a_{95} делятся на 9?

в) Первый член прогрессии $\{a_n\}$ делится без остатка на 19, второй — на 23, третий — на 31. Чему равна наименьшая возможная разность d этой прогрессии? Найдите наименьшее возможное значение a_5 при наименьшем возможном значении d.