А. Ларин. Тренировочный вариант № 460.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3| = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3|$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

2. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 2. Плоские углы при вершине A равны 60° каждый. Через середину диагонали A_1C проведена плоскость α, перпендикулярная этой диагонали.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α — квадрат.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

3. Решите неравенство: $\dfrac{\log_2 \log_4 (x+1)}{x^2 - 6x + 8} \cdot (25^x - 130 \cdot 5^x + 625) \geqslant 0.$

4. Имеются три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40% металла B, 30% металла C. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

5. В треугольнике MNK известно, что: $MN = 6$, $NK = 7$ и $\angle MNK = 60^\circ$. В треугольник MNK вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне MN, одна на стороне NK и одна на стороне MK. Через середину стороны MN и центр квадрата проведена прямая, которая пресекается с высотой KH в точке O, а с прямой NK — в точке F.

а) Докажите, что $KO = OH$.

б) Найдите FK.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^3 - 3x^2 - 9x + 3 - 0{,}5a) \times$$
$$\times (2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 4\sin^2 x - 1 - a) = 0$$

имеет ровно три различных решения.

7. Множество, состоящее из 20 первых натуральных чисел, разбивают произвольным образом на два подмножества по 10 чисел в каждом. Произведения всех чисел в этих подмножествах обозначим через M и N.

а) Может ли быть $M = N$?

б) Какие наибольшее и наименьшее целые значения может иметь частное $\frac{M}{N}$?

в) Сколько всего различных целых значений может иметь частное $\frac{M}{N}$?