А. Ларин. Тренировочный вариант № 458.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

2. В тетраэдре $ABCD$ на ребрах AD, DC, AB и BC отмечены точки K, M, N и L соответственно. Точка O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $KMLN$. Известно, что $\frac{OL}{OK}=\frac{3}{4}$; $\frac{ON}{OM}=\frac{24}{25}$; $DK\cdot NA-KA\cdot BN=AK\cdot NA.$

а) Докажите, что плоскость сечения $KMLN$ делит площадь грани ABD в соотношении 4 : 31.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость сечения $KMLN$ делит тетраэдр $ABCD$.

3. Решите неравенство: $\sqrt{7\cdot\log_{x^2-4}(x+2)+9}\geqslant 4-\log_{x^2-4}(x-2).$

4. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа 1 и 2010 деталей типа 2. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа 1 время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа 2. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

5. Точка E — середина основания AD трапеции $ABCD$, а точка M — середина стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади треугольника COD и четырехугольника $AMOE$ равны.

б) Найдите отношение площади четырехугольника $AMOE$ к площади трапеции $ABCD$, если $BC=2$ и $AD=5$.

6. Найдите (в градусах) сумму всех значений параметра α, где $0^\circ<\alpha<1000^\circ$, для каждого из которых существует хотя бы одно число $x\in[1;\ 2]$, удовлетворяющее уравнению

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+67{,}5^\circ\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}.$$

7. Для натурального числа n обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, меньших или равных n и взаимно простых с n. Число n будем называть хорошим, если оно делится на $\varphi(n)$.

а) Может ли хорошее число $n > 1$ быть нечетным?

б) Чему равно наибольшее значение $\frac{n}{\varphi(n)}$, где число n хорошее?

в) Какое наибольшее количество членов может иметь возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из хороших чисел?