А. Ларин. Тренировочный вариант № 441.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $(\sin^2 2x+\cos^2 x)+\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)+\dfrac{3}{2}=0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\,5\pi\right]$.

2. Дана пирамида $SABC$, в которой $AB = AC = SB = SC = 17$ и $BC = SA = 16$. Точки M и N — середины ребер BC и SA.

а) Докажите, что отрезок MN является общим перпендикуляром к прямым BC и SA.

б) Найдите объем пирамиды $ABMN$.

3. Решите неравенство:

$$\frac{1}{\log_{x-3}0{,}5}-\log_{x-2}(x+5)+$$
$$+\log_{0{,}5}(x+5)\geqslant\log_{x-2}(x-3).$$

4. В начале месяца Василий взял в банке кредит 2,4 млн руб. с месячной процентной ставкой 5% на 12 месяцев с погашением кредита по следующей схеме:

— в начале каждого месяца банк увеличивает долг на 5%;
— выплаты производятся в конце каждого месяца;
— каждая следующая выплата на 5% больше предыдущей.

Сколько тысяч рублей должна составлять первая выплата, чтобы Василий погасил свой кредит по указанной схеме за 12 месяцев?

5. Окружность с центром O_1 радиусом 9 вписана в треугольник ABC. Ее внешним образом касаются окружность с центром O_2 радиусом $\dfrac{81}{25}$, вписанная в угол A, и окружность с центром O_3 радиусом 1, вписанная в угол C.

а) Докажите, что $\angle C=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{24}{7}$.

б) Найдите площадь треугольника AO_1O_3.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-8a}{x+8}+\frac{x-1}{x-2a}=1$$

имеет единственный корень.

7. При проведении школьной математической олимпиады итоговая сумма баллов составляется из двух баллов за участие, 13 баллов за каждую взятую и решенную задачу и −8 баллов за каждую взятую и нерешенную задачу. Каждую задачу участник выбирает себе самостоятельно в запечатанном конверте. Число задач, предлагаемых для решения, неограниченно.

а) У одного из участников, решившего p задач и не решившего q задач, итоговая сумма оказалась равной u баллов. Найдите итоговую сумму участника, решившего $2p$ задач и не решившего $2q$ задач.

б) Известно, что итоговая сумма у двух участников оказалась одинаковой. Может ли разность между числом всех задач, взятых для решения одним участником, и числом задач, взятых для решения другим участником, делиться на 21?

в) Какое минимальное число задач надо взять, чтобы итоговая сумма оказалась равной нулю?