

ЕГЭ по математике 01.07.2023. Основная волна, резервный день. Санкт-Петербург. Вариант 603 (часть 2)

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $\log_4 x \cdot \log_4 \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right) = \log_4 \frac{x(x^2 - 1)}{8}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 49]$.

2. Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 3 и перпендикулярны друг другу. На ребрах AB, AD и CD отмечены точки K, L и M соответственно, причём $BK = AL = MD = 1$.

- а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD .
 б) Найдите длину отрезка пересечения грани ABC с плоскостью KLM .

3. Решите неравенство $4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geq 0$.

4. Вклад в размере 20 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает размер вклада на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x — целое число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 13 млн рублей.

5. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
 б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 4$?

6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x + |x^2 - x - 2| = y^2 + y + |y^2 - y - 2|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет больше двух решений.

7. Квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два натуральных корня.

- а) Найдите все возможные значения p , если $q = 13$.
 б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $p < 8$ и $q > 20$?
 в) Найдите наименьшее значение p при $q > 20$.