

**ЕГЭ по математике 26.06.2023. Основная волна, резервный день.
Санкт-Петербург. Вариант 507 (часть 2)**

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N и M соответственно, причем $SK : KB = 3 : 1$, а точки L и M — середины ребер SA и SD .

а) Докажите, что четырехугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как $2 : 3$.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 30° , площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $10\sqrt{2}$, а площадь основания пирамиды равна 32.

3. Решите неравенство $\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2(32x)} \geq \frac{\log_2 x^{16} + 18}{\log_2^2 x - 25}$.

4. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн руб., где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	S	$0,9S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 20 млн руб.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно. Оказалось, что $BC_1 = CB_1 = BC$.

а) Докажите, что точки B , C и середины отрезков BB_1 и CC_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите косинус угла между прямыми BB_1 и CC_1 , если $BC = 8$, $AB = 15$, $AC = 17$.

6. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(2x - x^2)^2 - 4\sqrt{2x - x^2} = a^2 - 4a.$$

имеет хотя бы один корень.

7. Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 24 контейнера массой 2 тонны на 15 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 18 контейнера массой 2 тонны на 13 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увести за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 45 контейнеров массой 2 тонны?