

**ЕГЭ по математике 26.06.2023. Основная волна, резервный день. Санкт-Петербург. Вариант 508 (часть 2)**

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение  $\sin 2x = 2 \sin x + \sin \left( x + \frac{3\pi}{2} \right) + 1$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$ .

2. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  в точках  $L$ ,  $K$ ,  $N$  и  $M$  соответственно, причем  $SK : KB = 2 : 1$ , а точки  $L$  и  $M$  — середины ребер  $SA$  и  $SD$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $KLMN$  является трапецией, длины оснований которой относятся как  $3 : 4$ .

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями  $ABC$  и  $\alpha$  равен  $45^\circ$ , площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$  равна  $14\sqrt{3}$ , а площадь основания пирамиды равна 54.

3. Решите неравенство:  $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}$ .

4. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

5. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $C_1$  и  $B_1$  соответственно. Оказалось, что  $BC_1 = CB_1 = BC$ .

- а) Докажите, что точки  $B$ ,  $C$  и середины отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$  лежат на одной окружности.
- б) Найдите косинус угла между прямыми  $BB_1$  и  $CC_1$ , если  $BC = 5$ ,  $AB = 12$ ,  $AC = 13$ .

6. Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$  имеет хотя бы одно решение.

7. Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

- а) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 22 контейнера массой 2 тонны на 14 кораблях?
- б) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 17 контейнеров массой 2 тонны на 12 кораблях?
- в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увести за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 77 контейнеров массой 2 тонны?