

ЕГЭ по математике 01.06.2023. Основная волна. Санкт-Петербург. Вариант 401 (часть 2)

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $2 \sin^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M является серединой ребра BB_1 , а точка N — середина ребра A_1C_1 . Плоскость α , параллельная прямым AM и B_1N , проходит через середину отрезка B_1M .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка B_1C_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , если все ребра этой призмы равны 4.

3. Решите неравенство $\log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0$.

4. В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составлять 600 тыс. руб.;
- в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 2230 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит платёж в 2035 году.

5. Биссектриса AM острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ делит боковую сторону CD пополам. Отрезок DN перпендикулярен отрезку AM и делит сторону AB в отношении $AN : NB = 5 : 1$.

а) Докажите, что прямые BM и CN перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN , если площадь трапеции равна $3\sqrt{2}$.

6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x+1| + |x-3| - y) \cdot \sqrt{10-x-y} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

7. На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A . Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?

в) Найдите наибольшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$.