А. Ларин. Тренировочный вариант № 412.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $\sin x\cdot(1+\cos x)=\cos^2 x+\cos x+1$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi;\,2\pi]$.

ИЛИ

а) Решите уравнение $2024\cdot 3^{\sqrt{1-\cos^2 x}}-3^{\sin x}=2023$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\,\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 12, точки K и L — середины ребер AD и C_1D_1 соответственно, а точка F расположена на ребре BC так, что $CF=3BF$.
а) Докажите, что плоскость KLF делит диагональ AC основания $ABCD$ в отношении $2:3$, считая от точки A.
б) Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости KLF.

ИЛИ

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1=3:2$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и E.
а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.
б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием сечение призмы $ABCDEFAB_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

3. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+1}-2^{x+3}+4\right)}{\log_{2^x-1}2}<80$.

ИЛИ

Решите неравенство: $\log_{0,5}\dfrac{\left|x^2-2x\right|+4}{|x+2|+x^2}\leqslant 0$.

4. В июле 2023 года Иван Морозов планирует взять кредит на 8 лет в размере 800 000 рублей. Условия возврата таковы:
— каждый январь с 2024 по 2027 год долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— каждый январь с 2028 по 2031 год долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
Определите r, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тыс. рублей.

ИЛИ

Предприятие производит детские санки и является убыточным. Известно, что при изготовлении x санок в месяц расходы предприятия на выпуск одних санок составляют

$$\left(\frac{168\,000}{x}+36-\left|12-\frac{72\,000}{x}\right|\right)\ \text{тыс. руб.},$$

а цена реализации каждой единицы продукции равна $72-\dfrac{3x}{1000}$ тыс. руб. Определите ежемесячный объем производства (в тысячах санок), при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего возможного уровня.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота BH и медиана AM, причем точки A, B, H и M лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AM : BH = 4 : 3$ и $MH = 3$.

ИЛИ

На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3OA$ от прямой OA, а на луче OA — точка N на расстоянии $3OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3.

а) Докажите, что треугольник AOB подобен треугольнику MON.

б) Найдите длину отрезка MN.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение:

$$\frac{2a^2+3ax+(4-3x)\cdot\log_2 x-2a\left(\log_2 x+2\right)}{x^2-3x}=0$$

имеет хотя бы один корень на промежутке [0,5; 4].

ИЛИ

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения:

$$3^{1-x^2-2ax-2a}=\log_3\frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}$$

принадлежат отрезку $[-3; 0]$.

7. Марина составляет из n четверок числа и находит всевозможные их суммы. Например, если $n = 4$, то возможных сумм было бы 5:

$$1)\ 4+4+4+4=16;\qquad 2)\ 4+4+44=52;\qquad 3)\ 44+44=88;$$
$$4)\ 444+4=448;\qquad 5)\ 4444.$$

а) Может ли одна из сумм S равняться 460, если $n = 25$?

б) Может ли одна из сумм S равняться 800, если $n = 25$?

в) Сколько существует различных значений n, для которых одна из сумм равна 800?

ИЛИ

В резиденции Деда Мороза работает не менее 60 и не более 80 гномиков. Дед Мороз проводит собрание. К началу собрания пришло меньше половины гномиков (а возможно, что и никто не пришел). Спустя 10 минут после объявленного начала на собрание пришел еще один гномик.

а) Могло ли получиться так, что после этого на собрании присутствовало больше половины гномиков?

б) Возможно ли, что и до и после прихода опоздавшего гномика процент гномиков на собрании выражался целым числом?

в) Какое наибольшее целое значение мог принять процент так и не пришедших на собрание гномиков?