

А. Ларин. Тренировочный вариант № 408.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin 2x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4}$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; 5\pi]$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 2 : 3$. Плоскость α параллельна прямой $A_1 F_1$ и проходит через точки M и B .

- а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A_1 , а основанием — сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α .

3. Решите неравенство: $\log_{1-\log_3 x} (1 + \log_x^2 3) \leq 1$.

4. Предприниматель взял в кредит под 20% годовых сумму S на целое число лет. Кредит должен быть погашен равными ежегодными платежами. Через некоторое целое число лет после исполнения очередного платежа предприниматель обнаружил, что выплатил банку сумму, большую S , при этом сумма оставшихся платежей также была больше S . Найдите минимальный срок, на который предприниматель мог взять кредит.

5. В квадрате $ABCD$ точки P и Q — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CP и DQ пересекаются в точке F .
- а) Докажите, что $\angle BFP = 45^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABF , если $AB = 2\sqrt{7}$.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}^2(ax) - \log_a x \leq 7$$

имеет решения, ни одно из которых не принадлежит отрезку $[2; 8]$.

7. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n , а через $a(n)$ — сумму квадратов цифр числа n .
- а) Может ли $a(n)$ быть в 12 раз больше, чем $s(n)$?
- б) У каких натуральных чисел n число $a(n)$ в 9 раз больше, чем $s(n)$?
- в) Возьмем любое натуральное число m и составим бесконечную последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = m$ и $x_{n+1} = a(x_n)$ для всех $n \geq 1$. При каких m количество различных членов этой последовательности конечно?