

## Задания 13 ЕГЭ–2022

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. Дан правильный треугольник  $ABC$ . Точка  $D$  лежит вне плоскости  $ABC$ ,  $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0,3$ .
  - а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны.
  - б) Найдите расстояние между прямыми  $AD$  и  $BC$ , если  $AC = 6$ .
2. Вне плоскости правильного треугольника  $ABC$  расположена точка  $D$ , причем  $\cos \angle DAC = \cos \angle DAB = 0,2$ .
  - а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны.
  - б) Найдите расстояние между этими прямыми, если  $AB = 2$ .
3. Дана треугольная пирамида  $SABC$ . Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $CH$  — высоты треугольника  $ABC$ .
  - а) Докажите, что  $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$ .
  - б) Найдите объём пирамиды  $SABC$ , если  $AB = 25$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 5\sqrt{13}$ ,  $SC = 3\sqrt{10}$ .
4. Различные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$  так, что отрезок  $AB$  является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .
  - а) Докажите, что  $\cos \angle ASC + \cos \angle CSB = 1,5$ .
  - б) Найдите объём тетраэдра  $SABC$ , если  $SC = 1$  и  $\cos \angle ASC = \frac{2}{3}$ .
5. В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .
  - а) Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
  - б) Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 10$ ,  $BC = 8$ ,  $SO = 8$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .
6. В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .
  - а) Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
  - б) Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 7$ ,  $BC = 5$ ,  $SO = 4$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .
7. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $M$  и  $N$  являются серединами рёбер  $AB$  и  $AD$  соответственно.
  - а) Докажите, что прямые  $B_1 N$  и  $CM$  перпендикулярны.
  - б) Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $N$  и  $B_1$  параллельно прямой  $CM$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если  $B_1 N = 6$ .
8. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $M$  и  $N$  являются серединами рёбер  $AB$  и  $AD$  соответственно.
  - а) Докажите, что прямые  $B_1 N$  и  $CM$  перпендикулярны.
  - б) Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $N$  и  $B_1$  параллельно прямой  $CM$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если  $B_1 N = 3\sqrt{5}$ .
9. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на диагонали  $BD_1$  отмечена точка  $N$  так, что  $BN : ND_1 = 1 : 2$ . Точка  $O$  — середина отрезка  $CB_1$ .
  - а) Докажите, что прямая  $NO$  проходит через точку  $A$ .
  - б) Найдите объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если длина отрезка  $NO$  равна расстоянию между прямыми  $BD_1$  и  $CB_1$  и равна  $\sqrt{2}$ .
10. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на диагонали  $BD_1$  отмечена точка  $N$  так, что  $BN : ND_1 = 1 : 2$ . Точка  $O$  — середина отрезка  $CB_1$ .
  - а) Докажите, что прямая  $NO$  проходит через точку  $A$ .
  - б) Найдите объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если длина отрезка  $NO$  равна расстоянию между прямыми  $BD_1$  и  $CB_1$  и равна  $\sqrt{6}$ .

- 11.** Точка  $M$  — середина бокового ребра  $SC$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ , точка  $N$  лежит на стороне основания  $BC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно боковому ребру  $SA$ .
- Плоскость  $\alpha$  пересекает ребро  $DS$  в точке  $L$ . Докажите, что  $BN : NC = DL : LS$ .
  - Пусть  $BN : NC = 1 : 2$ . Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает пирамиду.
- 12.** Точка  $O$  — точка пересечения диагоналей грани  $CDD_1C_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Плоскость  $DA_1C_1$  пересекает диагональ  $BD_1$  в точке  $F$ .
- Докажите, что  $BF : FD_1 = A_1F : FO$ .
  - Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $AA_1$ , соответственно. Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $DA_1C_1$ .
- 13.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$ . Точка  $M$  — середина  $SA$ , на ребре  $SB$  отмечена точка  $N$  так, что  $SN : NB = 1 : 2$ .
- Докажите, что плоскость  $CMN$  параллельна прямой  $SD$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $CMN$ , если все рёбра равны 12.
- 14.** Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , в основании которой лежит треугольник  $ABC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $B$  и  $B_1$  перпендикулярно прямой  $C_1M$ .
- Докажите, что одна из диагоналей грани  $ACC_1A_1$  равна одному из ребер этой грани.
  - Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AC$  в отношении 1:5, считая от вершины  $A$ ,  $AC = 20$ ,  $AA_1 = 32$ .
- 15.** Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , в основании которой лежит треугольник  $ABC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $B$  и  $B_1$  перпендикулярно прямой  $C_1M$ .
- Докажите, что одна из диагоналей грани  $ACC_1A_1$  равна одному из ребер этой грани.
  - Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AC$  в отношении 1 : 3, считая от вершины  $A$ ,  $AC = 10$ ,  $AA_1 = 12$ .
- 16.** На сфере  $\alpha$  выбрали пять точек:  $A, B, C, D$  и  $S$ . Известно, что  $AB = BC = CD = DA = 4$ ,  $SA = SB = SC = SD = 7$ .
- Докажите, что многогранник  $SABCD$  — правильная четырёхугольная пирамида.
  - Найдите объём многогранника  $SABCD$ .