Типовые тестовые задания по математике под редакцией И.В. Ященко, 2018.

При выполнении заданий с кратким ответом впишите в поле для ответа цифру, которая соответствует номеру правильного ответа, или число, слово, последовательность букв (слов) или цифр. Ответ следует записывать без пробелов и каких-либо дополнительных символов. Дробную часть отделяйте от целой десятичной запятой. Единицы измерений писать не нужно.

Если вариант задан учителем, вы можете вписать или загрузить в систему ответы к заданиям с развернутым ответом. Учитель увидит результаты выполнения заданий с кратким ответом и сможет оценить загруженные ответы к заданиям с развернутым ответом. Выставленные учителем баллы отобразятся в вашей статистике.

1. а) Решите уравнение $2\sin 2x-4\cos x+3\sin x-3=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение $7\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

3. а) Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x-\frac{3}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}+3=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{4};4\pi\right]$.

4. а) Решите уравнение $(2x^2-5x-12)(2\cos x+1)=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

5. Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A, B и M, образует угол 15° с плоскостью ABC.

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A, B и M.
б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы

6. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.
а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.
б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

7. Решите неравенство $2^{\log_5 x^2}+|x|^{\log_5 4}\leqslant 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)}$.

8. Решите неравенство $(\log_2^2 x-2\log_2 x)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$.

9. Решите неравенство $3^{\log_2 x^2}+2\cdot|x|^{\log_2 9}\leqslant 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$

10. Решите неравенство $2^{1+\log_3 x^2}+2\cdot|x|^{\log_3 4}\leqslant 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)}$.

11. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.
а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.
б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{\sin x-a\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{a+2}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a-(a^2-2a)\cos 2x+2}{3-\cos 4x+a^2}<1$$

содержит отрезок $\left[-2\pi;\ -\frac{7\pi}{6}\right]$.

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{\sqrt{a+1}-2\cos 3x+1}{\sin^2 3x+a+2\sqrt{a+1}+2}$ содержит отрезок $[2;\ 3]$.

15. Найдите все a, при каждом из которых уравнение $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f — четная периодическая функция с периодом $T=\frac{16}{3}$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=ax^2$, если $0\leqslant x\leqslant \frac{8}{3}$.

16. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2-x-2=|x^2-x-2|,\\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-1|+2x-x^2=|y^2-1|+2y-y^2,\\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+|x^2-2x|=y^2+|y^2-2y|,\\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}\leqslant 16$$

выполняется для всех значений x из отрезка $[-2;\ 1]$.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$3x^5+11x+4|x-a+3|+2|3x+a-5|+\sqrt[3]{4x+5}\leqslant 25$$

выполняется для всех значений x из отрезка $[-4;\ -1]$.

21. Найдите все значения a, при каждом из которых для любой пары $(u;\ v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u-7|\sin u+v-2a|+3|\sin u-2v-a-1|\leqslant 16.$$

22. Найдите наименьшее натуральное значение a, при котором расстояние между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $(x-a+4)(x^2-ax+4a-17)=0$ не меньше 9.

23. а) Существует ли натуральное число n, делящееся нацело на 12 и при этом имеющее ровно 12 различных натуральных делителей (в число делителей числа n включается единица и само число n)?

б) Найдите все натуральные числа, делящиеся нацело на 14 и имеющие ровно 14 различных натуральных делителей.

в) Существует ли натуральное число, делящееся нацело на 2014 и имеющее ровно 2014 различных делителей?

24. На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли.

а) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Пусть среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 7. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

25. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из трех значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

26. а) Приведите пример трехзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?

в) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

27. Назовем натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифра, вторая и предпоследняя и т. д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

а) Приведите пример числа-палиндрома, который делится на 15.

б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

в) Найдите 37-е по порядку число-палиндром, которое делится на 15.

28. а) Приведите пример натурального числа, произведение всех делителей которого оканчивается на 6 нулей.

б) Может ли произведение всех делителей числа, оканчивающегося ровно на три нуля, оканчиваться на нечетное число нулей?

в) Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 333 нуля. На сколько нулей может оканчиваться число N?

29. а) Приведите пример натурального числа, у которого ровно 7 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель?

в) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

30. а) Приведите пример натурального числа, которое в 15 раз больше суммы своих цифр.

б) Существует ли натуральное число, которое в 21 раз больше суммы своих цифр?

в) Найдите все натуральные числа, которые в 15873 раза больше суммы своих цифр.