1. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в)Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

2. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а)Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 3$, $d = 2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.

в)Каковы все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

3. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью— 0,5 очка, за проигрыш— 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а)Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 2$, $d = 2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$?

в)Каковы все возможные значения d, если известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

4. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$.

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

5. Пусть q— наименьшее общее кратное, а d— наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

6. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>5b$ и $c>8d$?

7. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{6}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>7d$?

8. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а)Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в)Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

9. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 15$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$?

в) Пусть $a + b + c + d=1000$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2=1000$. Найдите количество возможных значений числа a.

10. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 15$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 23$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 23$?

в) Пусть $a + b + c + d=1200$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2=1200$. Найдите количество возможных значений числа a.

11. Четыре натуральных числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1.$$

а) Могут ли все числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 9?

в)Найдите все возможные наборы чисел (без учета их порядка в наборе), среди которых ровно два числа равны.

12. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в)Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

13. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны натуральные числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в)Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

14. Коля множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное *m*. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное *n*.

а) Может ли модуль разности чисел *m* и *n* равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел *m* и *n* равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел *m* и *n*?

15. На окружности некоторым способом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в)Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стояших через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа *k* можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше *k*?

16. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку— целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма— это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а)Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?

б)Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?

в)Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

17. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста—доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а)Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Голоса распределились так, что рейтинг некоторого футболиста стал равным 31. Затем Вася проголосовал за этого футболиста. Каков теперь рейтинг футболиста с учётом голоса Васи?

б)Голоса распределяют между двумя футболистами. Может ли суммарный рейтинг быть больше 100?

в)На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. После того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста рейтинг стал равен 9. При каком наибольшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

18. Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр равен 4000. Известно, что длина одной стороны прямоугольника равна *n*% от длины другой стороны, где *n* — также натуральное число.

а) Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольника?

б) Какое наименьшее значение может принимать площадь прямоугольника?

в)Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольника, если дополнительно известно, что $n < 100$.

19. а)Чему равно число способов записать число 1292в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$ где числа a_i— целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99,\ i = 0; 1; 2; 3?$

б)Существуют ли 10 различных чисел *N* таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$ где числа a_i— целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99,\ i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

в)Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$ где числа a_i— целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99,\ i = 0; 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

20. а)Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б)Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в)Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

21. Будем называть четырёхзначное число интересным, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а)Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в)Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

22. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество {100; 101; 102; ...; 199} хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {3; 4; 5; 6; 8; 10; 12}?

23. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество {200; 201; 202; ...; 299} хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{100}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {1; 2; 4; 5; 7; 9; 11}?

24. Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 10, а сумма которых больше 90, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 90, но больше:

а) 80;

б) 82;

в) 81.

25. Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 11, а сумма которых больше 110, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 110, но больше:

а) 99;

б) 101;

в) 100.

26. Возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... и b_1, b_2, ..., b_n, ... состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}, \frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в)Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

27. Три числа назовем хорошей тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовем отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а)Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться. что среди них не найдется ни одной хорошей тройки?

б)Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в)Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

28. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход из них можно получить числа $a + b$ и $2a - 1$ или числа $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или 5 и 5).

а)Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в)Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

29. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

30. Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в)Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

31. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в)Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

32. а)Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n + 16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте a свойством?

в)Сколько существует двухзначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n + m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

33. а)Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б)Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в)Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

34. Шесть различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 39?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 34?

в) Какова их минимальная сумма?

35. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а)Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых нет ни одного очень счастливого числа?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в)Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

36. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество {100; 101; 102; ...; 199} хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12}?

37. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0,$ где a, b и c— натуральные числа, не превосходящие 100. Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее, чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень –7?

б) Может ли такое уравнение иметь корень –53?

в) Какой наименьший целый корень может иметь такое уравнение?

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

38. Дано квадратное уравнение $ax^2-bx+c=0,$ где a, b, c— натуральные числа, не превосходящие 200. Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее, чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень 9?

б) Может ли такое уравнение иметь корень 135?

в) Какой наибольший целый корень может иметь такое уравнение?

39. Дан выпуклый многоугольник M, который можно разрезать на 1292 квадрата площади 1.

а)Приведите пример такого многоугольника, если известно, что длина его наименьшей стороны больше 15.

б) Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник M?

в) Какое наибольшее и наименьшее значение может иметь периметр этого многоугольника?

40. Дима и Никита задумали по цифре и сообщили их Маше. Маша нашла сумму этих цифр, их разность, а затем перемножила все 4 числа. Мог ли полученный результат быть равен:

а) 1989?

б) 2012?

в) 2016?

Если нет — объясните, почему, если да — определите цифры, задуманные Димой и Никитой.

41. На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?

б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

42. С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

43. В каждой клетке квадратной таблицы 6x6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?

б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?

в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

44. а)Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.

б)Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?

в)Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

45. На доске написано n чисел a_i (i = 1, 2, …, n). Каждое из них не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на r_i%. При этом либо r_i = 2%, либо число a_i уменьшается на 2, то есть становится равным a_i − 2. (Какие-то числа уменьшились на число 2, а какие-то— на 2 процента).

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ быть равным 5?

б)Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ больше 2, при этом сумма чисел $a_1, a_2 \ldots a_n$ уменьшилась более чем на $2n$?

в)Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

46. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

47. а)Существует ли натуральное число n, делящееся нацело на 12 и при этом имеющее ровно 12 различных натуральных делителей (в число делителей числа n включается единица и само число n)?

б)Найдите все натуральные числа, делящиеся нацело на 14 и имеющие ровно 14 различных натуральных делителей.

в)Существует ли натуральное число, делящееся нацело на 2014 и имеющее ровно 2014 различных делителей?

48. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а)Могут ли быть одинаковыми два из трех значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в)Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

49. а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{100}$?

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right| \leqslant \frac{1}{10000}$?

в)Найдите все возможные значения натурального числа n при каждом которых значение выражения $\left|\frac{n+10}{n} - \sqrt{2}\right|$ будет наименьшим.

50. а) Приведите пример трехзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?

в) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

51. Назовем натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифра,вторая и предпоследняя, и т.д.). Например числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

а) Приведите пример числа-палиндрома, который делится на 15.

б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

в) Найдите 37-е по порядку число-палиндром, которое делится на 15.

52. а) Приведите пример натурального числа, произведение всех делителей которого оканчивается на 6 нулей.

б)Может ли произведение всех делителей числа, оканчивающегося ровно на три нуля, оканчиваться на нечетное число нулей?

в)Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 333 нуля. На сколько нулей может оканчиваться число N?

53. а) Приведите пример натурального числа, у которого ровно 7 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трехзначное число, у которого ровно 21 натуральный делитель?

в) Сколько существует таких трехзначных чисел, у которых ровно 18 натуральных делителей?

54. а) Приведите пример натурального числа, которое в 15 раз больше суммы своих цифр.

б) Существует ли натуральное число, которое в 21 раз больше суммы своих цифр?

в) Найдите все натуральные числа, которые в 15873 раза больше суммы своих цифр.

55. В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в два раза?

б)Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?

в)Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

56. а)Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых— единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых— единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \leqslant n$ и $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$.

57. В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. В первой школе он составил 54 балла. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1в школу №2, при этом средние баллы за тест увеличились на 12.5% в обеих школах.

а) Сколько учеников, писавших тест, могло быть в первой школе?

б) Какой максимальный балл мог быть у учащегося из первой школы?

в) Какой минимальный средний балл мог быть у учащихся во второй школе?

58. В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б)Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в)Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

59. В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 2 раза?

б)Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 9?

в)Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 2%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

60. В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали не меньше двух учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причем в школе № 1 средний балл равнялся 18. Один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе № 1 вырос на 10%.

а) Сколько учащихся могло писать тест в школе № 1 изначально?

б)В школе № 1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?

в)Известно, что изначально в школе № 2 писали тест более 10 учащихся и после перехода одного учащегося в эту школу и пересчета баллов средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе № 2 изначально?

61. За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б)Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

в)За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000— при получении двух звёзд и 2000— при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Примечание редакции Решу ЕГЭ: в п. а) считайте, начальный заряд достаточно большим.

62. а)Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б)Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

в)Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

63. На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел равняться 11?

в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех чисел.

64. В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б)Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в)Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

65. Дано трехзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 89?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 86?

в)Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

66. а)Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*15}{1*4*8*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{5}{3}$?

б)Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{4}{7}$?

в)Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{3}{4}-\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков * на + или –?

67. Все целые числа от 1 до 13 выписали в ряд так, что каждое число, начиная со второго, является делителем суммы всех предыдущих чисел.

а) Может ли на последнем месте стоять число 5?

б) Какие числа могут быть на последнем месте?

в) Сколько четных чисел может стоять на третьем месте?

68. а)Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б)Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?

в)Какое наибольшее количество различных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

69. Пять различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 26?

б) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 23?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех пяти чисел?

70. Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q=34$. Найдите все возможные значения *p*.

б) Пусть $p+q=22$. Найдите все возможные значения *q*.

в) Пусть $q^2-p^2=2812$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

71. Первый набор чисел состоит из чисел $2, 4, 8, ..., 2^{10}$. Второй набор состоит из чисел $3, 9, 27, ..., 3^{10}$. Числа разбиты на пары. В каждой паре на первом месте— число из первого набора, а на втором— число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили.

а) Может ли полученная сумма делиться на 9?

б) Может ли полученная сумма быть больше 1 000 000?

в) Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

72. Будем называть дробь «простой», если её числитель равен 1, а знаменатель— натуральное число.

а) Запишите число 1 в виде суммы трёх различных простых дробей.

б) Можно ли записать число 1 в виде суммы двух различных простых дробей?

в)Какие действительные числа, меньшие 1, можно записать в виде суммы некоторого числа различных простых дробей?

73. На доске написаны все пятизначные числа, в десятичной записи которых по одному разу встречаются цифры 3, 4, 5, 6 и 7 (34567, 34576 и т. д.).

а) Есть ли среди них число, которое делится на 55?

б) Есть ли среди них число, которое делится на 505?

в) Найдите наибольшее из этих чисел, делящееся на 11.

74. Известно, что *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f*— это числа 2, 3, 4, 5, 6 и 9, расставленные без повторений в некотором, возможно ином, порядке.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{29}{4}$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{451}{90}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

75. На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 6, к каждому числу из второй группы приписали справа цифру 9, а числа третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 9 раз?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 19 раз?

в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

76. Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а)Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала меньше грибов, чем какой-нибудь мальчик?

б) Может ли так случиться, что количество найденных грибов у всех детей будет различным?

в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

77. В наборе 70 гирек массой 1, 2, ..., 70 граммов. Их разложили на две кучки так, что в каждой кучке есть хотя бы одна гирька. Потом из второй кучки переложили одну гирьку в первую кучку. В результате средняя масса гирек в первой кучке увеличилась ровно на один грамм.

а) Могла ли первая кучка (до перекладывания) состоять из гирек с весами 11 г, 15 г, 19 г?

б) Мог ли средний вес гирек в первой кучке до перекладывания равняться 9,5 грамма?

в) Какое максимальное количество гирек могло быть первоначально в первой кучке?

78. На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270?

в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?

79. а)Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трехчлена x^2+mx+n равен 17?

б)Существуют ли натуральные числа m и n, такие, что дискриминант квадратного трехчлена x^2+mx+n равен 54?

в)Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трехчлена $x^2+(3m+n)x+(3n+m)$, если известно, что числа m, n и D — натуральные?

80. Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр.

а) Чему равна сумма цифр две тысячи пятнадцатого замечательного числа?

б) Сколько существует двухзначных замечательных чисел?

в) Какой порядковый номер замечательного числа 5999?

г) Чему равна сумма всех четырехзначных замечательных чисел?

81. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... состоит из натуральных чисел, причем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a_5}{a_4}=\frac{9}{5}$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a_5}{a_4}=\frac{7}{5}$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1}=(2n^2-2)a_n$?

82. Про число A известно, что оно не является 2020-й степенью натурального числа и имеет ровно 2020 различных делителей, включая его самого и единицу.

а) Может ли A быть кубом целого числа?

б) Может ли A быть четвертой степенью целого числа?

в) Найдите наименьшее значение A.

83. На доске записаны числа 1, 2, 3, …, 27. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 31 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах.

а) Можно ли сделать 4 хода?

б) Можно ли сделать 9 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

84. На асфальте мелом написали в ряд 333 цифры 3 и расставили между некоторыми из них знаки «плюс» и «минус».

А) Может ли значение полученного числового выражения равняться 333?

Б) У значения полученного выражения сложили все цифры, затем с полученным значением сделали то же самое и так 3 раза. Могло ли в итоге получиться число 33?

В) Найдите все числа, которые могли получиться после 33-х переходов, описанных в пункте б).

85. В каждой из девяти ячеек строки слева направо в некотором (возможно, ином) порядке расставлены по одному 9 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

а)Могло ли оказаться так, что среди любых четырёх подряд (идущих слева направо) из этих чисел есть ровно одно, делящееся на 3, и ровно одно, делящееся на 4?

б)Могло ли оказаться так, что среди любых четырёх подряд (идущих слева направо) из этих чисел есть ровно одно, делящееся на 3, а среди любых двух подряд (идущих слева направо) из этих чисел есть ровно одно простое число?

в)Какое наибольшее значение может принимать произведение суммы всех чисел, стоящих на нечётных местах, и суммы всех чисел, стоящих на чётных местах этой строки?

86. Вася записал на листе бумаги некоторую последовательность из n чисел ($n>3$), а затем продолжил её, повторив все числа ещё раз в том же порядке. Затем Вася предложил Маше сыграть в игру по следующим правилам. За один ход Маша может спросить у Васи сумму любых трёх подряд идущих чисел. Маша выигрывает, если через несколько ходов узнает все числа.

а) Может ли Маша гарантированно выиграть, если $n = 5$?

б) Может ли Маша гарантированно выиграть, если $n = 9$?

в) За какое наименьшее число ходов Маша может гарантированно выиграть, если $n = 22$?

87. а)Приведите пример десяти таких различных двузначных чисел, среди которых ровно 5 делятся на 2, ровно 5 делятся на 3, ровно 5 делятся на 5 и ровно 3 делятся на 6.

б)Существуют ли такие десять различных двузначных чисел, среди которых ровно 7 делятся на 3, ровно 7 делятся на 5, ровно 7 делятся на 7?

в)Про десять различных двузначных чисел известно, что наибольший общий делитель любых двух из них равен 1, 2, 3, 5 или 7. Какое наибольшее количество из этих десяти чисел может делиться на 7?

88. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел, в которой k- й член задается формулой $a_k = 2k-1$, где $k \in N$, $k \geq 1$. Далее рассматриваются суммы нескольких (не менее двух) слагаемых из некоторого набора идущих подряд членов этой последовательности. Может ли такая сумма быть равной:

а) 2021?

б) 289?

в) квадрату натурального числа?

г) кубу натурального числа?

89. а) Существует ли такое натуральное число n, что числа n^2 и $(n+17)^2$ имеют одинаковые остатки при делении на 69?

б)Существует ли такое натуральное число n, что числа n^2 и $(n+17)^2$ имеют одинаковые остатки при делении на 68?

в)Пусть $k(m)$— количество трехзначных натуральных чисел n, таких, что числа n^2 и $(n+m)^2$ имеют одинаковые остатки при делении на 68, причем m— двузначное натуральное число. Определите наименьшее значение k, отличное от нуля.

90. Известно, что квадратное уравнение вида $x^2+mx+k=0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения k при $m=-6$.

б) Найдите все возможные значения m при $k-m=45.$

в) Найдите все возможные значения корней уравнения, если $k^2-m^2=2236$.

91. Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b,$ где a и b — цифры, $a \neq 0.$

а)Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=198?$

б)Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=495,$ если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в)Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc},$ если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 6?

92. В натуральном числе каждая цифра, кроме первой и последней, меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.

а) Приведите пример такого четырёхзначного числа.

б) Приведите пример такого шестизначного числа.

в) Найдите наибольшее такое число.

93. Маша задумала 6 различных натуральных чисел и проделывает с ними такую операцию: сначала находит среднее арифметическое первых двух чисел, затем— среднее арифметическое полученного результата и третьего числа, после— среднее арифметическое полученного результата и четвертого числа, затем— среднее арифметическое полученного числа и пятого числа, и наконец— среднее арифметическое полученного результата и шестого числа. Полученный результат она обозначает через M. Далее Маша находит число A— среднее арифметическое исходных чисел.

а) Возможно ли, что $A=M$?

б) Возможно ли, что $M=6A$?

в) Найдите наибольшее натуральное значение n, для которого возможно, что $M=nA$.

94. а)Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 250?

б)Может ли десятичная запись произведения трёх последовательных трёхзначных чисел оканчиваться на 8750?

в)Найдите все такие натуральные числа n, что каждое из чисел n, $n+1$ и $n+2$трёхзначное, а десятичная запись их произведения $n(n+1)(n+2)$ оканчивается на 4000.

95. Имеются зеленые и желтые карточки, всего их 80 штук. На каждой карточке написано натуральное число, а среднее арифметическое всех чисел равно 31. Все числа на желтых карточках разные. При этом любое число на желтой карточке больше любого числа на зелёной карточке. Числа на желтых карточках увеличили в 3 раза, после этого среднее арифметическое всех чисел стало равно 88.

а) Может ли быть ровно 50 желтых карточек?

б) Может ли быть ровно 15 зеленых карточек?

в) Какое наибольшее количество желтых карточек может быть?

96. Последовательность задана рекуррентным способом: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Найдите:

а) сумму пяти первых членов этой последовательности;

б) $\log_2(a_{20});$

в) произведение двадцати первых членов этой последовательности.

97. Для любого натурального числа n $(n \geq 1)$ обозначим через $O(n)$ количество нечётных цифр в десятичной записи этого числа. Например, $O(123)=2$, а $O(2048)=0$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $O(4\cdot n)=O(n)+2$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $O(5^n+2^{n+1}-2)>n$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $O(11\cdot n)=O(n)+2$?

98. Даны 15 различных натуральных чисел, записанных в порядке возрастания.

а)Могут ли эти числа образовывать арифметическую прогрессию, если сумма первого, третьего и седьмого из них равна 125, а сумма всех чисел равна 885?

б)Могут ли эти числа образовывать арифметическую прогрессию, если сумма первого, третьего и седьмого из них равна 90, а сумма всех чисел равна 810?

в) Могут ли первые восемь из этих чисел образовывать геометрическую прогрессию с целым знаменателем, если сумма этих восьми чисел равна $103 \cdot 994$?

99. Сима записала несколько различных натуральных чисел, все цифры которых четны, после чего нашла сумму этих чисел и обозначила ее через S.

а) Может ли сумма цифр числа S быть нечетным числом?

б) Может ли произведение цифр числа S быть нечетным числом?

в)Пусть десятичная запись числа S состоит из 366 цифр. Какое наименьшее натуральное значение может принимать произведение цифр числа S?

100. Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1! = 1$).

а)Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 9 нулями?

б)Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 23 нулями?

в)Сколько существует натуральных чисел n, меньших 100, для каждого из которых десятичная запись числа $n! \cdot (100 - n)!$ оканчивается ровно 23 нулями?

101. Для набора 30 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых трёх чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 999?

б) Может ли одним из этих чисел быть число 66?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

102. Сторона квадрата на 3см длиннее ширины прямоугольника, площади этих фигур равны, а все длины сторон — целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 8?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 16?

в)Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов. В ответе укажите длины их сторон.

103. Напомним, что произведение натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ обозначается $n!$ (например, $1! = 1,\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$). Определите наибольшее возможное n в следующих случаях:

а) $\frac{n!}{8}$ не является натуральным числом.

б) $(n + 2)! - 42(n!) < 0$.

в) $(n!)^2 - 12n!$ не делится на 13.

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

104. Даны три различных натуральных числа такие, что второе число равно сумме цифр первого, а третье — сумме цифр второго.

а) Может ли сумма трех чисел быть равной 420?

б) Может ли сумма трех чисел быть равной 419?

в)Сколько существует троек чисел, таких что: первое число— трехзначное, а последнее равно 5?

105. Дано трехзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 55?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?

в)Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр, если первая цифра данного числа равна 7?

106. Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 28000$?

б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 2971$?

в) Найдите наибольшее произведение $A \cdot S < 5997$.

107. Дано трёхзначное число A, сумма цифр которого равна S.

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?

б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $A \cdot S$, если оно больше 1503?

108. Дано трехзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 11?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 5?

в)Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр, если первая цифра данного числа равна 7?

109. а)Можно ли представить число $\frac{1}{6}$ в виде суммы двух дробей, числители которых — единицы, а знаменатели — различные натуральные числа?

б) Тот же вопрос для числа $\frac{2}{7}$.

в)Какое наименьшее количество слагаемых указанного вида (дробей с числителями 1 и знаменателями— попарно различными натуральными числами) потребуется, чтобы представить число $\frac{3}{7}$?

110. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, что сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 7$;

б) при $n = 12$;

в) при $n = 2015$?

111. Вова задумал натуральное число a и посчитал сумму его цифр, эту сумму он обозначил b. Затем он посчитал сумму цифр числа b и обозначил ее через c. Оказалось, что среди чисел a, b и c нет одинаковых.

а) Может ли $a + b + c = 3000$?

б) Может ли $a + b + c = 2000$?

в) Сколько существует четырехзначных чисел a, для которых $c = 4$?

112. а)Можно ли в выражении $\ln 5 * \ln 6 * \ln 7 * \ln 8 * \ln 10 * \ln 12 * \ln 14$ вместо всех знаков * расставить знаки + и − так, чтобы в результате получился нуль?

б)Можно ли в выражении $\ln 6 * \ln 7 * \ln 8 * \ln 12 * \ln 14 * \ln 24 * \ln 32$ вместо всех знаков * расставить знаки + и − так, чтобы в результате получился нуль?

в)Какое наибольшее количество попарно различных чисел можно выбрать из набора $\ln 7,\ \ln 8,\ \ldots,\ \ln 20$ и расставить знаки + и − так, чтобы их сумма стала равна нулю?

113. Пусть $\overline{abc}$ обозначает трехзначное число, равное $100a + 10b + c$, где a, b и c— десятичные цифры, $a \neq 0$.

а)Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $\overline{abc} + \overline{cba} = 1595$?

б)Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c, что $3 \cdot \overline{abc} = 5 \cdot \overline{cba}$?

в)Какое наибольшее значение может принимать дробь $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 6?

114. Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $[\sqrt{2}] = 1$ и $[-3,4] = -4$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $[\sqrt{n+2}] \cdot [\sqrt{n-2}] = n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $[\sqrt{n+35}] \cdot [\sqrt{n-34}] = n$?

в) Найдите все натуральные числа n, для которых $[\sqrt{n+75}] \cdot [\sqrt{n-74}] = n$.

115. Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ задана следующим соотношением: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1\ (n \geqslant 1)$.

а) Делится ли число a_{2022} на 33?

б) Может ли член этой последовательности a_n при $n > 1$ быть точным квадратом?

в) Какие остатки при делении на 7 могут иметь члены этой последовательности?

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

116. Введем на множестве натуральных чисел новую операцию квазиумножения следующим образом: $m \otimes n = m \cdot n + m + n$. Результат операции будем называть квазипроизведением чисел m и n.

а)Число $n > 1$ будем называть квазипростым, если его нельзя представить в виде квазипроизведения двух меньших чисел. Найдите все простые числа, которые являются квазипростыми.

б)Число n будем называть квазичетным, если существует такое число m, что $n = 2 \otimes m$. Будут ли квазичетными числами сумма и произведение двух квазичетных чисел? А трех или четырех?

в)Треугольник называется квазипрямоугольным, если он удовлетворяет теореме Квазипифагора: Сумма квазиквадратов двух сторон равна квазиквадрату третьей стороны. Найдите длины сторон равнобедренного квазипрямоугольного треугольника наименьшего периметра.

117. Натуральное число будем называть симметричным, если оно совпадает с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке.

а) Будет ли симметричное число с четным количеством цифр делиться на 11?

б)К трехзначному числу припишем справа это же число. Будет ли полученное шестизначное число точным квадратом?

в) Какие шестизначные симметричные числа делятся на 77? Сколько всего таких чисел?

118. Настя задумала трехзначное натуральное число n. В результате деления этого числа на сумму его цифр получается натуральное число m.

а) Может ли $m = 11$?

б)Какое наименьшее число n могла задумать Настя, если известно, что средняя цифра этого числа равна 9, а первая цифра — четная и больше 2?

в) Чему равно наименьшее возможное значение m, если последняя цифра числа n равна 4?

119. Каждую цифру a натурального числа n заменим последней цифрой числа a^3. Полученное в результате такой замены число будем обозначать n^* и называть взаимным с числом n. Число, совпадающее со своим взаимным, будем называть особенным.

а) Могут ли два разных натуральных числа иметь одинаковые взаимные числа?

б)Для каких натуральных чисел n будет особенным число $\dfrac{(n+n^*)}{2}$? Сколько всего существует трехзначных особенных чисел?

в) Решите уравнение $n + n^* = 1318$.

120. Имеется уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, числа a, b и c — целые, $a \neq 0$.

а)Найдите все возможные значения b, если известно, что a=10, c=30, а уравнение имеет два различных целых корня?

б)Найдите все возможные значения корней, если $b = c$ и уравнение имеет либо два различных целых корня, либо один целый корень кратности 2.

в) Известно, что $a^4 + b^4 + c^4 = 1568$ и уравнение имеет корни, причем все корни являются целыми числами. Найдите все возможные значения корней.

121. Из трех разных цифр a, b, c, отличных от 0, всевозможными перестановками составлены 6 трехзначных чисел. Пусть их наибольший общий делитель равен d.

а) Может ли быть $d = 6$?

б) Может ли быть $d = 7$?

в)Какое максимальное значение может иметь d? Найдите значения a, b, c, при которых d достигает максимального значения.

122. Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ задана следующим соотношением: $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + r_n,$ Где r_n — последняя цифра числа 4^n, для всех $n \geqslant 1.$

а) Найдите формулу для члена a_n этой последовательности.

б) При каких значениях n член последовательности a_n является точным квадратом?

в) При каких значениях n член последовательности a_n является степенью числа 2?

123. Множество простых делителей числа n будем называть ДНК этого числа. Числа m и n, имеющие одинаковые ДНК, будем называть родственными. Например, числа 12 и 18 родственные, т. к. их ДНК={2,3}.

Число m называется симметричным с числом n, если оно записано теми же цифрами, но в обратном порядке. При этом если последними цифрами числа n были нули, то в начале числа m они отбрасываются.

а)Пусть число n делится на 10. Может ли оно быть родственным со своим симметричным числом?

б) Сумма первой и последней цифр натурального числа равна 13. Может ли оно быть родственным со своим симметричным числом?

в)Найдите минимальное и максимальное составное трёхзначное число, у которого нет трёхзначных родственных чисел.

124. Каждое из четырёх подряд идущих натуральных чисел разделили на их первые цифры и результаты сложили в сумму S.

а) Может ли быть $S = 41\frac{11}{24}$?

б) Может ли быть $S = 569\frac{29}{72}$?

в)Найдите наибольшее целое S, если все четыре числа лежат в отрезке от 400 до 999 включительно.

125. Даны четыре последовательных натуральных числа. Каждое из чисел поделили на одну из его цифр, не равную нулю, а
затем четыре полученных результата сложили.

а) Может ли полученная сумма равняться 386?

б) Может ли полученная сумма равняться 9,125?

в)Какое наибольшее целое значение может принимать полученная сумма, если известно, что каждое из исходных чисел не меньше 200 и не больше 699?

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

126. Каждое из четырех последовательных натуральных чисел, последняя цифра которых не равна нулю, разделили на его последнюю цифру. Полученные результаты сложили и назвали S. Тогда:

а) может ли $S = 16\frac{5}{6}$?

б) может ли $S = 369\frac{29}{126}$?

в) если числа были трехзначные, то какое наибольшее целое значение S могло получиться?

127. Составим две последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

$a_1 = 1$, $a_n = \frac{n}{p}$ $(n > 1)$, где p — наименьший простой делитель числа n;

$b_1=1$, b_n $(n>1)$— количество таких чисел m, для которых $a_m = n$. Оно показывает, сколько раз число n встречается в последовательности $\{a_n\}$.

а) Найдите b_{187}.

б) Для каких чисел $n > 1$ и $m > 1$ выполняется равенство $b_n = b_m$?

в) Чему равно b_m, если $m = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$?

128. Юра записывает на доске n-значное натуральное число, не используя цифру 0. Затем он записывает рядом ещё одно число, полученное из исходного перемещением первой цифры на последнее место. (Например, если n=3 и исходное число равно 123, то второе число равно 231.) После этого Юра находит сумму этих двух чисел.

а) Может ли сумма чисел на доске равняться 2728, если $n = 4$?

б) Может ли сумма чисел на доске равняться 83 347, если $n = 5$?

в)При n=6 оказалось, что сумма чисел делится на 99. Сколько натуральных чисел от 925111 до 925 999, которые Юра мог использовать в качестве исходного числа?

129. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 264. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а)Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел?

б)Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

130. Натуральные числа m и n будем называть дружественными, если $\text{НОД}(m,n) > 1.$ Составим следующую последовательность натуральных чисел a_n: $a_1 = 1,$ a_n $(n > 1)$— количество чисел, дружественных с n и не превосходящих n.

а) Чему равно a_{2022}?

б) Найдите все натуральные числа n, для которых $a_n = 2.$

в)Найдите все натуральные числа n, для которых, для которых дружественными числами являются все делители $d > 1$ и только они.

131. Дано натуральное трехзначное число *n*, в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь *f*(*n*), в числителе которой само число *n*, а в знаменателе— произведение всех цифр числа *n*.

а) Приведите пример такого числа *n*, для которого $f(n)=\frac{119}{24}$.

б) Существует ли такое *n*, что $f(n)=\frac{125}{24}$?

в) Какое набольшее значение может принимать дробь *f*(*n*), если она равна несократимой дроби со знаменателем 24?

132. Для каждого натурального числа *n* обозначим через a_n максимальный делитель числа *n*, являющийся квадратом натурального числа, и $b_n=\frac{n}{a_n}$.

а) Может ли у числа b_n быть 18 делителей?

б) Для скольких натуральных чисел *n* $(1\leqslant n\leqslant 1000)$ выполняется равенство $a_n=25$?

в) Последняя цифра числа *n* равна 9. Чему равна сумма последних цифр чисел a_n и b_n?

133. Для действительного числа *x* обозначим через [*x*] наибольшее целое число, не превосходящее *x*. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2,$ так как $2\leqslant\frac{11}{4}<3.$

а) Существует ли такое натуральное число *n*, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число *n*, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$?

в)Сколько существует различных натуральных *n*, для которых $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$
?

134. Возьмем три любые (не обязательно различные) цифры *a*, *b*, *c*, отличные от 0, и всевозможными перестановками составим шесть трехзначных чисел $\{\overline{abc},\overline{acb},\overline{bac},\overline{bca},\overline{cab},\overline{cba}\}$. Сумму этих чисел обозначим $f(a,b,c)$.

а) Может ли $f(a,b,c)$ равняться 1754 при каких-либо значениях *a*, *b*, *c*?

б) Сколько существует различных значений $f(a,b,c)$?

в)Сколько трехзначных чисел $n=\overline{abc}$ совпадают со средним арифметическим чисел $\{\overline{abc},\overline{acb},\overline{bac},\overline{bca},\overline{cab},\overline{cba}\}$?

135. Для каждого натурального числа введем $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ (например, $1!=1$, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$).

а) Найдите наибольшее возможное *n*, если $\left(\frac{n!}{8}\right)$ не является натуральным числом.

б) Найдите наибольшее возможное *n*, если $(n+2)!-42(n!)<0.$

в) Найдите наибольшее возможное *n*, если $((n!)^2-12n!)$ не делится на 13.

136. В десятичной записи числа *a* > 1 только чередующиеся единицы и нули: *a* = 1010...

а) Может ли это число быть квадратом натурального числа?

б) Какие числа такого вида будут простыми?

в) Сколько единиц в записи этого числа, если оно делится на 13?

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

137. По кругу расставлено *N* различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 425. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 4, а сумма любых трёх идущих подряд чисел нечётна.

а) Может ли *N* быть равным 280?

б) Может ли *N* быть равным 149?

в) Найдите наибольшее значение *N*.

138. С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?

б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?

в)Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

139. Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* — различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если *a* > 3*b* и *c* > 2*d*?