Задания

Задания Д12 C4 № 527490

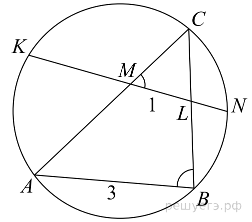
В треугольнике ABC длина AB равна 3, $\angle ACB = \arcsin\frac{3}{5}$, хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а длина LM равна 1.

а) Найдите высоту треугольника KNC, опущенную из вершины C.

б) Найдите площадь треугольника KNC.

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)

Решение.



Треугольники ACB и NCM подобны по двум углам с коэффициентом $AB : MN = 3$, поэтому

$$2 = S_{ABNM} = S_{ABC} - S_{MNC} = S_{ABC} - \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{8}{9}S_{ABC}.$$

Отсюда $S_{ABC} = \frac{9}{4}$. Обозначим стороны треугольника $AC = b$, $BC = a$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\angle ACB = \frac{3}{10}ab,$$

откуда $ab = \frac{15}{2}$. По теореме косинусов для треугольника ABC в то же время имеем

$$9 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ACB = a^2 + b^2 - 2\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{4}{5},$$

откуда $a^2 + b^2 = 21$, поэтому $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 36$ и $a + b = 6$. Значит, a и b являются корнями квадратного уравнения $t^2 - 6t + \frac{15}{2} = 0$ (теорема Виета), поэтому они равны $3 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$. Будем считать, что $AC > BC$, тогда

$$b = 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}, a = 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

а) Найдем высоту треугольника ACB и уменьшим ее втрое. Имеем:

$$h_c = \frac{2S_ABC}{AB} = \frac{9}{2\cdot 3} = \frac{3}{2},$$

поэтому ответ $\frac{1}{2}$.

б) Обозначим $KM = x$, $LN = y$. Из подобия, кроме того, $MC = \frac{1}{3}a$, $NC = \frac{1}{3}b$, $MA = b - \frac{1}{3}a$, $NB = a - \frac{1}{3}b$. По свойству пересекающихся хорд имеем $KM\cdot MN = CM\cdot MA$ и $KL\cdot LN = CL\cdot LB$. Далее:

$$x(1+y) = \frac{1}{3}a\left(b - \frac{1}{3}a\right) \text{ и } y(1+x) = \frac{1}{3}b\left(a - \frac{1}{3}b\right).$$

Складывая эти уравнения, получим:

$$2xy + x + y = \frac{2}{3}ab - \frac{1}{9}(a^2+b^2) = \frac{8}{3}.$$

Вычитая, получим:

$$x - y = \frac{1}{9}(b^2 - a^2) = \frac{1}{9}(a+b)(b-a) = \frac{2}{3}(b-a) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно $x^2 - 2xy + y^2 = \frac{8}{3}$. Прибавляя к этому уравнению удвоенное уравнение $2xy + x + y = \frac{8}{3}$, получим:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 8 \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) = 8 \Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 9;$$
$$KL = x + y + 1 = 3.$$

Значит,

$$S_{KCN} = \frac{1}{2}KN\cdot d(C, KN) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$.