Задания

Задание 18 № 503150

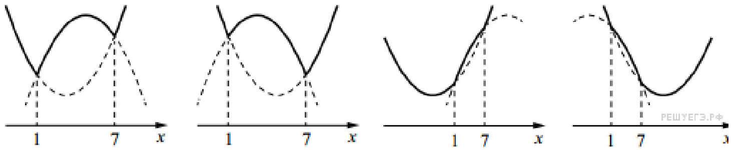
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+7|$ больше 1.

Решение.

При $x^2-8x+7\geq 0: f(x)=x^2+2(a-4)x+7,$ а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a.$

П р и $x^2-8x+7<0: f(x)=-x^2+(2a+8)x-7,$ а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функции $f(x)$ может принять только в точках $x=1,$ $x=7$ или $x=4-a.$ Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ 2a^2-8a+1-|a^2-9|<0. \end{cases}$$

Е с л и $\dfrac{1}{2}<a<3,$ то второе неравенство принимает вид $3a^2-8a-8<0,$ откуда $\dfrac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\dfrac{4+\sqrt{40}}{3}.$ Этот промежуток содержит интервал $\left(\dfrac{1}{2};3\right).$

Если $a\geq 3,$ то $a^2-8a+10<0,$ откуда $4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}.$ Значит, $3\leq a<4+\sqrt{6}.$

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}.$

Прототип задания