

А. Ларин: Тренировочный вариант № 160.

1. Дано уравнение $x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x} = 3x - 9\sqrt{x} + 6$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[\sqrt{5}; 4\sqrt{5}]$.

2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что объём пирамиды с основанием $A_1 B C D_1$ и вершиной в точке B_1 составляет третью часть объёма куба.

б) Найдите угол между плоскостями $B_1 A_1 B$ и $B_1 D_1 C$.

3. Решите неравенство $\frac{\log_2(x+2)}{2^{x+2} - 4^x - 3} \leq \log_2(x+2)$.

4. Три окружности, две из которых одинакового радиуса, попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C .

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус круга, вписанного в четырёхугольник с вершинами в точках A , B , C , O , если известно, что радиусы окружностей 6; 6 и 4, а точка O — центр меньшей из них.

5. Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C , расположенного между A и B , в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A . Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте P , и одновременно прибыли первый — в A , второй — в B . Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A , а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к P . Найдите расстояние между C и P , если расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

6. Найдите все a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{3a+2}(\cos^2 x - a^2 \cos x + a^2) = 0$$

имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$.

7. Целые числа a_1, a_2, a_3, a_4 четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии.

а) Может ли разность дробей $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_4}{a_3}$ равняться $\frac{3}{4}$?

б) Может ли разность дробей $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_4}{a_3}$ равняться $\frac{9}{8}$?

в) Найдите все возможные целые значения разности дробей $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_4}{a_3}$.