

Задания

Задания Д10 С3 № 505998

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x} \cdot (\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6, \\ \log_x 2 < \log_{6-x} 2. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим второе неравенство системы. Найдем ограничения на x :

$$\begin{cases} 0 < x < 6 \\ x \neq 1 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 5) \cup (5; 6). \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Для таких x :

$$\begin{aligned} \log_x 2 < \log_{6-x} 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(6-x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(6-x) - \log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2(6-x)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{6-x-x}{(x-1) \cdot (5-x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-1) \cdot (x-5)} < 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) < 0. \end{aligned}$$

Решим полученное неравенство методом интервалов на $(0; 1) \cup (1; 5) \cup (5; 6)$

Интервалы	(0;1)	(1;3)	(3;5)	(5;6)
Знак рационального выражения	-	+	-	+

Таким образом, решениями второго неравенства является множество $(0; 1) \cup (3; 5)$.

Теперь решим первое неравенство системы:

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x} \cdot (\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6 \Leftrightarrow 7^{x-\frac{1}{8}x^2} - 7 \cdot 7^{-x+\frac{x^2}{8}} - 6 < 0 \Leftrightarrow 7^{x-\frac{1}{8}x^2} - \frac{7}{7^{x-\frac{x^2}{8}}} - 6 < 0.$$

Введем новую переменную. Пусть $7^{x-\frac{1}{8}x^2} = t, t > 0$. Тогда:

$$t - \frac{7}{t} - 6 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 7 \Leftrightarrow 0 < t < 7.$$

Перейдем к переменной x :

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 - \sqrt{16-8} \\ x > 4 + \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 - 2\sqrt{2} \\ x > 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Решения второго неравенства системы: $(-\infty; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Пересечением решений обоих неравенств является множество $(0; 1)$.

Ответ: $(0; 1)$.