Задания

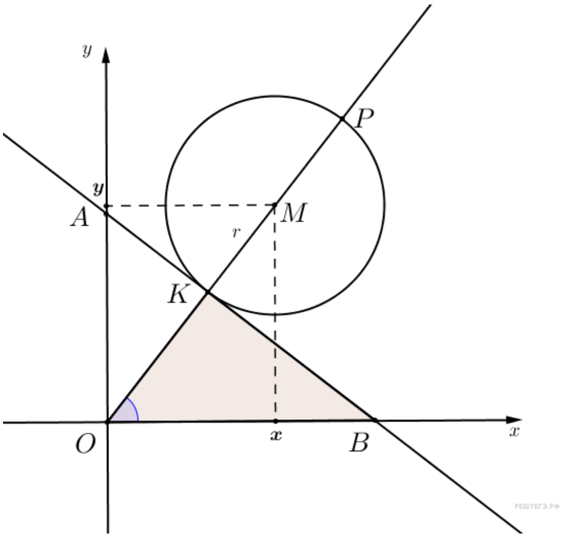
Задания Д12 C4 № 505879

В системе координат задана точка $M\ (x;\ y)$, $x > 0$, $y > 0$. Дана окружность с центром в точке M радиуса r, причем любая точка окружности имеет положительные координаты. Прямая, проходящая через точку O (0; 0) и через точку M, пересекает окружность в точках K и P, причем ордината точки K меньше, чем ордината точки P. Прямая, которая касается окружности в точке K, пересекает прямые $x = 0$ и $y = 0$ в точках A и B.

Найдите площадь треугольника OKB.

Решение.

Треугольник OKB является прямоугольным ($OK \perp KB$), поэтому для поиска его площади достаточно найти его катеты:



$$OK = OM - KM = \sqrt{x^2+y^2} - r.$$

1) В случае, если точка A лежит на оси OY, B на оси OX, получим:

$$\operatorname{tg}\angle KOB = \frac{y}{x} \Rightarrow KB = OK \operatorname{tg}\angle KOB = \frac{y}{x}\left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right).$$

Тогда $S_{OKB} = \frac{1}{2} OK \cdot KB = \frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right)^2}{2x}.$

2) В случае, если точка A лежит на оси OX, B на оси OY (рисунок не приведен), получим:

$$\operatorname{tg}\angle KOB = \frac{x}{y} \Rightarrow KB = OK \operatorname{tg}\angle KOB = \frac{x}{y}\left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right).$$

Тогда $S_{OKB} = \frac{1}{2} OK \cdot KB = \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right)^2}{2y}.$

Ответ: $S_{OKB} = \frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right)^2}{2x}$ или $S_{OKB} = \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right)^2}{2y}$.