

Задания**Задание 19 № 526541**

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 7. Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 2,5?

в) Известно, что $n = 6$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

Решение.

а) Сумма натуральных чисел, записанных в первый день, равна 7. Следовательно, чисел, записанных в первый день, не более 7. Тогда в день n ($n > 6$) записанных чисел не более 1. И это число заведомо больше 7 (т.к. сумма чисел с каждым днем увеличивается). Противоречие с условием (все записанные числа должны быть меньше 6).

б) Пусть $n = 3$, в первый день на доску записали число 1 и шесть чисел 2, во второй день — шесть чисел 3, а в третий день — пять чисел 4. Тогда сумма чисел в первый день равна 13, во второй — 18, а в третий — 20. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $1\frac{6}{7} < 2$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $2\frac{5}{6} > 2,5$.

в) Заметим, что в шестой день на доску было записано хотя бы одно число. Предположим, что в шестой день на доску было записано не больше двух чисел. Значит, в первый день на доску было записано не менее 6 чисел, и их сумма была не меньше 6. Но это невозможно, поскольку в шестой день сумма записанных на доску чисел должна быть не меньше 11, а сумма двух чисел, каждое из которых меньше 6, не может быть больше 10.

Таким образом, в шестой день на доску было записано хотя бы три числа. Следовательно, в пятый день было записано не менее четырёх чисел, в четвёртый день — не менее пяти, в третий — не менее шести, во второй — не менее семи, а в первый — не менее восьми. Значит, суммарно чисел было не меньше 33.

Покажем, что могло быть записано 33 числа, удовлетворяющих условию задачи. Пусть в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 1, 1, 1, 1, 1, 3; в третий — 1, 1, 1, 3, 3; в четвёртый — 1, 1, 3, 3, 3; в пятый — 1, 1, 5, 5; в шестой — 4, 4, 5. Тогда суммы записанных за эти дни чисел соответственно равны 8, 9, 10, 11, 12 и 13, то есть числа удовлетворяют условиям задачи.

Ответ: а) нет; б) да; в) 33.

Прототип задания