

Окружности и четырёхугольники

1. Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T .

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC .

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC , если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

2. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

3. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

4. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .

5. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

6. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

7. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

8. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

9. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите угол OIH , если $\angle ABC = 55^\circ$.

10. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

11. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

12. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

13. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

14. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK и KE , если $\angle ECD = 15^\circ$.

15. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD .

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$; радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

18. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ , если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

19. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точке S и M .

а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD .

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O .

Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

20. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

21. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O . Прямая DO пересекает сторону AB в точке M , а прямая CO пересекает сторону AD в точке K .

- Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.
- Найдите площадь треугольника AOM , если $BC = 10$ и $AD = 15$.

22. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

- Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.
- Найдите BD .

23. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причем H — середина AE .

- Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
- Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

24. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M , а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N .

- Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.
- Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если CDB вдвое меньше угла ADB .

25. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

- Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- Найдите O_1O_2 .

26. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 10$. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .

27. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает BC и CD в точках E и K соответственно.

- Докажите, что отрезки AE и AK равны.
- Найдите AD , если $CE = 48$, $DK = 20$, $\cos \angle BAD = 0,4$.

28. Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

- Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.
- Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 11$, $KL = 10$, $LB = 4$.

29. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D .

- Докажите, что $AE = AK$.
- Найдите AD , если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos \angle BAD = 0,2$.

30. Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма и пересекает продолжение стороны AD в точке E , а продолжение стороны CD в точке K .

- Докажите, что отрезки BE и BK равны.
- Найдите отношение KE к AC , если $\angle ABC = 135^\circ$.

31. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Около треугольника KLN описана окружность, прямые LM и MN — касательные к этой окружности.

- Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
- Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

32. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка QN , если $BC = 4,5$, $AD = 21,5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD — прямой.

33. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Окружность проходит через точки B и C и пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q , отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите PM , если отрезки AQ и BQ перпендикулярны, $AB = 15$, $BC = 1$, $CD = 17$, $AD = 9$.

34. Около $\triangle ABC$ описана окружность. Прямая BO , где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

а) Докажите, что $OP = AP$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

35. Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN . Высота BH пересекает эту окружность в точке K .

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN , если $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$, а радиус окружности равен 12.

36. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$.

37. В остроугольном треугольнике ABC , $\angle A = 60^\circ$. Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь $\triangle AHO$, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

38. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P .

а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.

б) Найдите угол $\angle APC$, если $DM = 1$ и $MC = 4$.

39. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

40. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.