

Окружности и четырёхугольники

1. Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T .

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC .

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC , если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

2. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

3. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

4. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .

5. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

6. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольнике ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

7. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольнике ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

8. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

9. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите угол OIH , если $\angle ABC = 55^\circ$.

10. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.
- Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
 - Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.
11. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.
- Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
 - Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?
12. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.
- Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.
 - Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.
13. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.
- Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.
 - Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.
14. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .
- Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.
 - Найдите отношение CK и KE , если $\angle ECD = 15^\circ$.
15. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .
- Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
 - Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD .
16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.
- Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
 - Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.
17. Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3$; радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.
- Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.
 - Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
18. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.
- Докажите, что около четырёхугольника $ABQP$ можно описать окружность.
 - Найдите длину отрезка DQ , если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

19. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точке C и M .

а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD .

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O .

Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

20. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

21. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O . Прямая DO пересекает сторону AB в точке M , а прямая CO пересекает сторону AD в точке K .

а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.

б) Найдите площадь треугольника AOM , если $BC = 10$ и $AD = 15$.

22. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD .

23. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причем H — середина AE .

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

24. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M , а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N .

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если $\angle CDB$ вдвое меньше угла ADB .

25. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2 .

26. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 10$. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD .

27. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает BC и CD в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что отрезки AE и AK равны.

б) Найдите AD , если $CE = 48$, $DK = 20$, $\cos \angle BAD = 0,4$.

28. Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 11$, $KL = 10$, $LB = 4$.

29. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D .

а) Докажите, что $AE = AK$.

б) Найдите AD , если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos \angle BAD = 0,2$.

30. Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма и пересекает продолжение стороны AD в точке E , а продолжение стороны CD в точке K .

- Докажите, что отрезки BE и BK равны.
- Найдите отношение KE к AC , если $\angle ABC = 135^\circ$.

31. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Около треугольника KLN описана окружность, прямые LM и MN — касательные к этой окружности.

- Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
- Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

32. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите длину отрезка QN , если $BC = 4,5$, $AD = 21,5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD — прямой.

33. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Окружность проходит через точки B и C и пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q , отличных от концов отрезка, соответственно.

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите PM , если отрезки AQ и BQ перпендикулярны, $AB = 15$, $BC = 1$, $CD = 17$, $AD = 9$.

34. Около $\triangle ABC$ описана окружность. Прямая BO , где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

- Докажите, что $OP = AP$.
- Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

35. Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN . Высота BH пересекает эту окружность в точке K .

- Докажите, что $AN = CK$.
- Найдите KN , если $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$, а радиус окружности равен 12.

36. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

- Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.
- Найдите площадь треугольника APC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$.

37. В остроугольном треугольнике ABC , $\angle A = 60^\circ$. Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

- Докажите, что $AH = AO$.
- Найдите площадь $\triangle AHO$, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

38. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P .

- Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.
- Найдите угол $\angle APC$, если $DM = 1$ и $MC = 4$.

39. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

- Докажите, что $AH = AO$.
- Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

40. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

- Докажите, что $AH = AO$.
- Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.