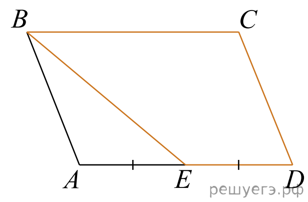
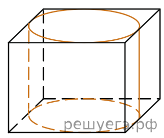
ЕГЭ−2025. Досрочная волна 28.03.2025. Центр.

1. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $BCDE$.



2. Даны векторы $\vec{a} = (3;\, 1)$, $\vec{b} = (2;\, -6)$. Найдите значение выражения $(\vec{a}+\vec{b})(5\vec{a}-\vec{b})$.

3.
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5. Найдите объем параллелепипеда.



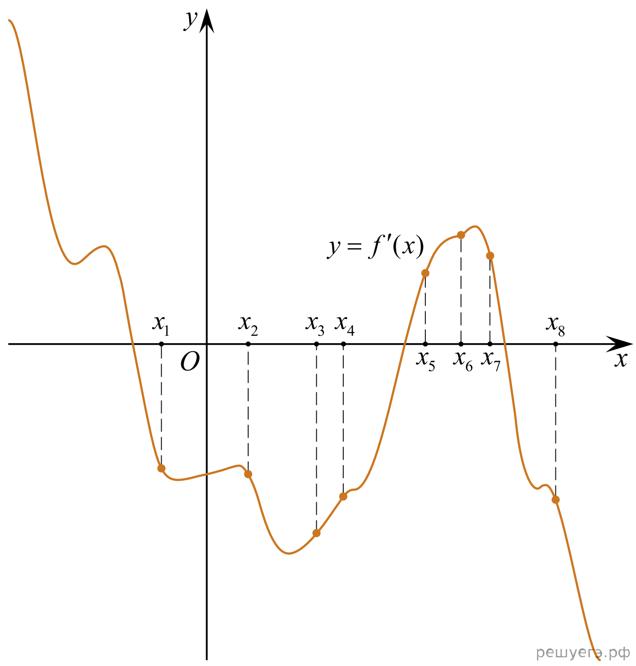
4. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Протор», «Ротор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только последнюю игру.

5. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,5. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

6. Найдите корень уравнения $\log_7(4-x) = 2$.

7. Найдите $5\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}9$.

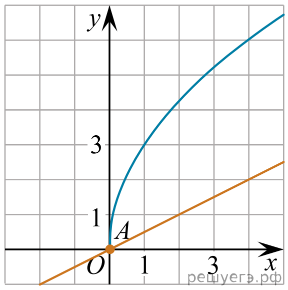
8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и восемь точек на оси абсцисс: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



9. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $\upsilon_0 = 100$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 32$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, где t — время в часах. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 150 км от города. Ответ дайте в минутах.

10. Один мастер может выполнить заказ за 15 часов, а другой — за 10 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

11. На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



12. Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 38x + 38)e^{x-25}$.

13. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной треугольной призме сторона AB основания равна 2, точка M — середина ребра CC_1.

а) Докажите, что сечение A_1MB — равнобедренный треугольник.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения равна 6.

15. Решите неравенство $7\log_{12}(x^2 - 13x + 42) \leqslant 8 + \log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}$.

16. Строительство нового завода стоит 100 миллионов рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ миллионов рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тысяч рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 4 года?

17. Дана трапеция с диагоналями равными 5 и 12. Сумма оснований равна 13.

а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4 + (a-3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

19. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 5 писем, или 16 писем, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?