

## Треугольники

- Биссектриса  $CD$  угла  $ACB$  при основании равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) делит сторону  $AB$  так, что  $AD = BC = 2$ .
  - Докажите, что  $CD = BC$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
- Площадь треугольника  $ABC$  равна 12. На прямой  $AC$  взята точка  $D$  так, что точка  $C$  является серединой отрезка  $AD$ . Точка  $K$  — середина стороны  $AB$ , прямая  $KD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $L$ .
  - Докажите, что  $BL : LC = 2 : 1$ .
  - Найдите площадь треугольника  $BLK$ .
- Точка  $D$  делит сторону  $AC$  в отношении  $AD : DC = 1 : 2$ .
  - Докажите, что в треугольнике  $ABD$  найдётся медиана, равная одной из медиан треугольника  $DBC$ .
  - Найдите длину этой медианы в случае, если  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ , и  $AC = 9$ .
- На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  отложены соответственно отрезки  $AD = \frac{1}{3}AB$ ,  $BE = \frac{1}{3}BC$ ,  $CF = \frac{1}{3}CA$ .
  - Докажите, что  $S_{AMC} = S_{ANB} = S_{BKC}$ , где  $M = AE \cap CD$ ,  $K = CD \cap BF$ ,  $N = AE \cap BF$ .
  - Найдите, какую часть от площади треугольника  $ABC$  составляет площадь треугольника  $MNK$ .
- В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена высота  $CD$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , равны 0,6 и 0,8.
  - Докажите подобие треугольников  $ACD$  и  $BCD$ ,  $ACD$  и  $ABC$ .
  - Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .
- В треугольнике  $ABC$  известны стороны  $AB = 4$ ,  $AC = \sqrt{17}$  и  $BC = 5$ . На стороне  $AB$  взята точка  $D$  такая, что  $AD = 1$ .
  - Докажите, что  $CD$  и  $AB$  перпендикулярны.
  - Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $BDC$  и  $ADC$ .
- Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AC = CB$ , а синус угла  $C$  равен 1. Треугольник  $ABD$  — равнобедренный, с боковой стороной равной 10. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
- Найти высоту равнобедренного треугольника, проведенную его боковой стороне, равной 2, если синус одного его угла равен косинусу другого.
- Найти длины сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , если  $BC = 8$ , а длины высот, проведенных к  $AC$  и  $BC$ , равны соответственно 6,4 и 4.
- В равнобедренном треугольнике  $ABC$  на прямой  $BC$  отмечена точка  $D$  так, что угол  $CAD$  равен углу  $ABD$ . Найдите длину отрезка  $AD$ , если боковая сторона треугольника  $ABC$  равна 5, а его основание равно 6.
- В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AC$  — основание. На продолжении стороны  $CB$  за точку  $B$  отмечена точка  $D$  так, что угол  $CAD$  равен углу  $ABD$ .
  - Докажите, что  $AB$  биссектриса угла  $CAD$ .
  - Найдите длину отрезка  $AD$ , если боковая сторона треугольника  $ABC$  равна 5, а его основание равно 6.
- В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  выбрана точка  $K$  так, что  $CK : BK = 1 : 2$ . Точка  $E$  — середина стороны  $AB$ . Отрезок  $CE$  и  $AK$  пересекаются в точке  $P$ .
  - Докажите, что треугольники  $BPC$  и  $APC$  имеют равные площади.
  - Найдите площадь треугольника  $ABP$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 120.
- В прямоугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  прямого угла проведены высота  $CH$ , медиана  $CM$  и биссектриса  $CL$ .
  - Докажите, что  $CL$  является биссектрисой угла  $MCH$ .
  - Найдите длину биссектрисы  $CL$ , если  $CH = 3$ ,  $CM = 5$ .
- В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ .
  - Докажите, что треугольники  $AOC$  и  $C_1OA_1$  подобны.
  - Найдите площадь четырехугольника  $ACA_1C_1$ , если известно, что угол  $ABC$  равен  $30^\circ$ , а площадь треугольника  $ABC$  равна 80.
- Площадь треугольника  $ABC$  равна 72, а сумма длин сторон  $AC$  и  $BC$  равна 24.
  - Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
  - Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник  $ABC$ , если известно, что две вершины этого квадрата лежат на стороне  $AB$ .
- В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AM$  и  $CN$ .
  - Докажите, что углы  $ACB$  и  $MNB$  равны.
  - Вычислите длину стороны  $AC$ , если известно, что периметр треугольника  $ABC$  равен 25 см, периметр треугольника  $BMN$  равен 15 см, а радиус окружности, описанной около треугольника  $BMN$  равен 3 см.
- В прямоугольный треугольник  $ABC$  вписана окружность, которая касается гипотенузы  $AB$  в точке  $K$ , а катетов — в точках  $P$  и  $M$ .
  - Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  равна  $AK \cdot BK$ .
  - Найдите площадь треугольника  $PKM$ , если известно, что  $AK = 12$ ,  $BK = 5$ .
- В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с катетами  $AC = 3$  и  $BC = 2$  проведены медиана  $CM$  и биссектриса  $CL$ .
  - Докажите, что площадь треугольника  $CML$  составляет одну десятую часть от площади треугольника  $ABC$ .
  - Найдите угол  $MCL$ .
- Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме длин катетов.
  - В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины прямого угла проведена высота  $CH$ . Найдите сумму длин радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $ACH$  и  $BCH$ , если известно, что  $CH = \sqrt{5}$ .
- В прямоугольном треугольнике  $ABC$  синус угла  $A$  равен  $\frac{1}{3}$ . На гипотенузе  $AB$  взята точка  $H$ , а на катете  $AC$  — точка  $K$ . Известно, что прямая  $KH$  перпендикулярна гипотенузе и делит треугольник  $ABC$  на две равновеликие части.
  - Докажите, что в четырехугольник  $KHBC$  можно вписать окружность.
  - Найдите радиус этой окружности, если известно, что  $KH = 1$ .
- Дан треугольник  $ABC$ . В нем проведены биссектрисы  $AM$  и  $BN$ , каждая из которых равна  $\frac{2772\sqrt{6}}{71}$ .
  - Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
  - Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если его основание равно 132.

22. Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  в произвольном месте поставлена точка  $M$ .
- Докажите, что сумма расстояний от точки  $M$  до сторон треугольника  $ABC$  равна высоте этого треугольника.
  - Найдите расстояние от точки  $M$  до стороны  $AB$ , если расстояние от точки  $M$  до сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно равны  $10\sqrt{133}$  и  $3\sqrt{133}$ , а площадь треугольника  $ABC$  равна  $14364\sqrt{3}$ .
23. Даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  пересекаются в точке  $C_2$ . Прямые  $AC$  и  $A_1C_1$  пересекаются в точке  $B_2$ . Прямые  $BC$  и  $B_1C_1$  пересекаются в точке  $A_2$ .
- Докажите, что точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной прямой.
  - Найдите отношение площади треугольника  $A_1B_1C_1$  и площади треугольника  $ABC$ , если высоты треугольника  $ABC$  равны  $2$ ,  $\frac{10}{11}$ ,  $\frac{5}{7}$ , а высоты треугольника  $A_1B_1C_1$  равны  $2$ ,  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{10}{9}$ .
24. Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ .
- Докажите, что  $AD^2 = AB^2 \cdot \frac{CD}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - CD \cdot BD$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = 14$ ,  $AC = 11$ ,  $BD = 3$ ,  $AD = \sqrt{145}$ .
25. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $E$ . Окружности  $w_1$  и  $w_2$ , вписанные в треугольники  $ABE$  и  $CBE$ , касаются прямой  $BE$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно.
- Докажите, что  $KM = \frac{1}{2} \cdot |CE - AE|$ .
  - Определите, на сколько радиус окружности  $w_2$  больше радиуса окружности  $w_1$ , если известно, что  $AE = 9$ ,  $CE = 15$ , а радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности равен  $4$ .
26. В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Точки  $A_2$  и  $C_2$  симметричны середине стороны  $AC$  относительно прямых  $BC$  и  $AB$  соответственно.
- Докажите, что отрезки  $A_1A_2$  и  $C_1C_2$  лежат на параллельных прямых.
  - Найдите расстояние между точками  $A_2$  и  $C_2$ , если известно, что  $AB = 7$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 5$ .
27. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  отмечена точка  $E$ , при этом  $BE = 4$ ,  $EA = 5$ ,  $BC = 6$ .
- Докажите, что углы  $BAC$  и  $BCE$  равны.
  - Найдите площадь треугольника  $AEC$ , если известно, что угол  $ABC$  равен  $30^\circ$ .
28. Площадь треугольника  $ABC$  равна  $10$ ; площадь треугольника  $AHB$ , где  $H$  — точка пересечения высот, равна  $8$ . На прямой  $CH$  взята такая точка  $K$ , что треугольник  $ABK$  — прямоугольный.
- Докажите, что  $S_{ABK} = S_{ABC} \cdot S_{AHB}$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABK$ .
29. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  расположена точка  $K$  так, что  $AK : KB = 3 : 5$ . На прямой  $AC$  взята точка  $E$  так, что  $AE = 2CE$ . Известно, что прямые  $BE$  и  $CK$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь треугольника  $BOC$  равна  $20$ .
30. Через точку  $T$  внутри треугольника  $ABC$  проведены три прямые  $k$ ,  $l$  и  $m$  так, что  $k \parallel AB$ ,  $l \parallel BC$ ,  $m \parallel AC$ . Эти прямые образуют три треугольника, два из которых равны по площади.
- Докажите, что квадрат суммы квадратных корней из площадей треугольников, образованных прямыми  $k$ ,  $l$  и  $m$  со сторонами треугольника  $ABC$ , равен площади этого треугольника;
  - Найдите площадь меньшего треугольника, если известно, что площадь треугольника  $ABC$  равна  $25$ , а площадь каждого из равных треугольников равна  $4$ .
31. Медиана  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $O$ .
- Докажите, что  $CO = AB$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ .
32. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$ .
- Докажите, что угол между биссектрисами  $AA_1$  и  $BB_1$  равен  $90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$ .
  - Найдите площадь четырехугольника  $ABA_1B_1$ , если известно, что  $AC = 4$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ .
33. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AK$  и  $BP$ .
- Докажите, что углы  $AKP$  и  $ABP$  равны.
  - Найдите длину отрезка  $PK$ , если известно, что  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 4$ .
34. Высота равнобедренной трапеции  $ABCD$  ( $BC$  и  $AD$  — основания) равна длине её средней линии.
- Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
  - Найдите радиус окружности, касающейся сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  трапеции, если известно, что  $BC = 4$ ,  $AD = 6$ .
35. Четырёхугольник  $ABCD$  со взаимно перпендикулярными диагоналями  $AC$  и  $BD$  вписан в окружность.
- Докажите, что квадрат диаметра окружности равен сумме квадратов противоположных сторон четырёхугольника.
  - Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если известно, что  $AB = \sqrt{5}$ ,  $BC = \sqrt{2}$ ,  $CD = \sqrt{7}$ .
36. К двум окружностям, не имеющим общих точек, проведены три общие касательные: одна внешняя и две внутренние. Пусть  $A$  и  $B$  — точки пересечения общей внешней касательной с общими внутренними.
- Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры окружностей, одинаково удалена от точек  $A$  и  $B$ .
  - Найдите расстояние между точками  $A$  и  $B$ , если известно, что радиусы окружностей равны  $6$  и  $3$  соответственно, а расстояние между центрами окружностей равно  $15$ .
37. В треугольнике  $ABC$   $BA = 8$ ,  $BC = 7$ , угол  $B$  равен  $120^\circ$ . Вписанная в треугольник окружность  $\omega$  касается стороны  $AC$  в точке  $M$ .
- Докажите, что  $AM = BC$ .
  - Найдите длину отрезка с концами на сторонах  $AB$  и  $AC$ , перпендикулярного  $AB$  и касающегося окружности  $\omega$ .
38. Точка  $K$  лежит на диаметре  $AB$  окружности с центром  $O$ .  $C$  и  $D$  — точки окружности, расположенные по одну сторону от  $AB$ , причём  $\angle OCK = \angle ODK$ .
- Докажите, что  $\angle CKB = \angle DKA$ .
  - Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , если известно, что  $OK = 3,6$ ,  $BK = 9,6$ ,  $\angle OCK = \angle ODK = 30^\circ$ .
39. В окружность с центром в точке  $O$  вписан прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ . На большем катете  $BC$  взята точка  $D$  так, что  $AC = BD$ . Точка  $E$  — середина дуги  $ACB$ .
- Докажите, что угол  $CED$  равен  $90^\circ$ .
  - Найдите площадь пятиугольника  $AODEC$ , если известно, что  $AB = 13$ ,  $AC = 5$ .
40. Окружность  $\omega$  с центром в точке  $O$  касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$  и продолжений сторон  $AB$  и  $AC$ . Вписанная в этот треугольник окружность с центром в точке  $E$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ .
- Докажите, что  $BK = CM$ .
  - Найдите площадь четырёхугольника  $OKEM$ , если известно, что  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AB = 4$ .

41. В неравностороннем треугольнике  $ABC$  угол  $BAC$  равен  $45^\circ$ . Продолжение биссектрисы  $CD$  треугольника пересекает описанную около него окружность  $\omega_1$  в точке  $E$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $ADE$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  в точке  $F$ .
- Докажите, что  $DE$  — биссектриса угла  $FDB$ .
  - Найдите радиус окружности  $\omega_2$ , если известно, что  $AC = 6$ ,  $AF = 2$ .
42. Дан квадрат  $ABCD$ . Точки  $K, L, M$  — середины сторон  $AB, BC$  и  $CD$  соответственно.  $AL$  пересекает  $DK$  в точке  $P$ ,  $DL$  пересекает  $AM$  в точке  $T$ ,  $AM$  пересекает  $DK$  в точке  $O$ .
- Докажите, что точки  $P, L, T, O$  лежат на одной окружности;
  - Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $PLTO$ , если  $AB = 4$ .
43. На диагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $E$  и  $P$ , причем  $AE : EP : PC = 1 : 2 : 1$ . Прямые  $DE$  и  $DP$  пересекают стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно.
- Докажите, что  $KM$  параллельна  $AC$ .
  - Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ , если известно, что площадь пятиугольника  $BKEPM$  равна 30.
44. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  известно, что  $BC = 2 \cdot AC$ . На гипотенузе  $AB$  вне треугольника построен квадрат  $ABEF$ . Прямая  $CE$  пересекает  $AB$  в точке  $O$ .
- Докажите, что  $OA : OB = 3 : 4$ .
  - Найдите отношение площадей треугольников  $AOC$  и  $BOE$ .
45. Хорда  $AB$  окружности параллельна касательной, проходящей через точку  $C$ , лежащую на окружности. Прямая, проходящая через точку  $C$  и центр окружности, вторично пересекает окружность в точке  $P$ .
- Докажите, что треугольник  $ABP$  равнобедренный.
  - Найдите отношение, в котором хорда  $AB$  делит диаметр  $CP$ , если известно, что  $\angle APB = 150^\circ$ .
46. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на стороне построен квадрат вне треугольника.
- Докажите, что прямая, соединяющая центр квадрата и центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности, проходит через точку  $C$ .
  - Найдите расстояние между центром квадрата и центром вписанной в треугольник  $ABC$  окружности, если известно, что  $AC = 4\sqrt{2}$ ,  $BC = 3\sqrt{2}$ .
47. К окружности, вписанной в квадрат  $ABCD$ , проведена касательная, пересекающая стороны  $AB$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно.
- Докажите, что периметр треугольника  $AMP$  равен стороне квадрата.
  - Прямая  $MP$  пересекает прямую  $CD$  в точке  $K$ . Прямая, проходящая через точку  $K$  и центр окружности, пересекает прямую  $AB$  в точке  $E$ . Найдите отношение  $BE : BM$ , если  $AM : MB = 1 : 3$ .
48. Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник  $ABC$ , касается основания  $AC$  в точке  $M$ . Вторая окружность касается основания  $AC$  и продолжений боковых сторон.
- Докажите, что длина основания треугольника является средним геометрическим диаметров первой и второй окружностей.
  - Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 3, а  $BM = 8$ .
49. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ .
- Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABM$ , быть в два раза меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ?
  - Окружности, вписанные в треугольники  $ABM$  и  $CBM$ , касаются медианы  $BM$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно. Найдите расстояние между точками  $P$  и  $K$ , если известно, что  $AB = 17$ ,  $BC = 7$ ,  $AC = \sqrt{177}$ .
50. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $AC$  отмечены точки  $C_1$  и  $B_1$  соответственно, причем  $BC_1 : AC_1 = 1 : 3$ ,  $AB_1 : CB_1 = 2 : 5$ . Прямые  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ .
- Докажите, что площадь треугольника  $BOC$  в десять раз больше площади треугольника  $BOC_1$ .
  - Найдите площадь четырехугольника  $AB_1OC_1$ , если площадь треугольника  $B_1OC$  равна 150.
51. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$ , отличная от вершин, что  $MC = AC$ . Точка  $P$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $BC$ .
- Докажите, что около четырехугольника  $BMCP$  можно описать окружность.
  - Найдите длину отрезка  $MP$ , если известно, что  $AB = 6$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 3$ .
52. В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB : BC : AC = 3 : 4 : 5$ . Первая окружность вписана в треугольник  $ABC$ , а вторая касается  $AB$  и продолжения сторон  $BC$  и  $AC$ .
- Доказать, что отношение радиусов окружностей равно  $2 : 1$ .
  - Найти расстояние между точками касания окружностей стороны  $AB$ , если  $AC = 15$ .
53. В квадрате  $ABCD$ , со стороной равной  $a$ , точки  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AD$  и  $CD$  соответственно. Отрезки  $BP$  и  $AQ$  пересекаются в точке  $R$ .
- Доказать, что около четырехугольников  $BCQR$  и  $DPRQ$  можно описать окружности.
  - Найти расстояние между центрами этих окружностей.
54. Окружность касается прямых  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ . Точка  $A$  лежит между  $B$  и  $D$ , а точка  $C$  — между  $B$  и  $E$ . Точки  $A, D, E, C$  лежат на одной окружности.
- Доказать, что треугольники  $ABC$  и  $DBE$  подобны.
  - Найти площадь  $ABC$ , если  $AC = 8$  и радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , равен 1.
55. В остроугольном треугольнике  $ABC$  из вершин  $A$  и  $C$  опущены высоты  $AP$  и  $CQ$  на стороны  $BC$  и  $AB$ . Известно, что площадь треугольника  $ABC$  равна 18, площадь треугольника  $BPQ$  равна 2, а длина отрезка  $PQ$  равна  $2\sqrt{2}$ .
- Доказать, что треугольники  $QBP$  и  $CBA$  подобны.
  - Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
56. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$  так, что их центры лежат по разные стороны от отрезка  $AB$ . Через точку  $A$  проведены касательные к этим окружностям  $AC$  и  $AE$  (точка  $C$  лежит на первой окружности, а точка  $E$  — на второй). Площадь четырехугольника  $ACBE$  в 5 раз больше площади треугольника  $ABC$ ,  $BD$  — биссектриса угла  $ABE$  (точка  $D$  лежит на хорде  $AE$ ).
- Найти отношение длин отрезков  $AB$  и  $BC$ .
  - Найти значения чисел  $p$  и  $q$ , если  $\vec{AB} = p\vec{BE} + q\vec{DE}$ .
57. Равнобедренные треугольники  $ABC$  ( $AB = BC$ ) и  $KLM$  ( $KM = LM$ ) расположены так, что  $M$  — середина  $AC$ ,  $B$  — середина  $KL$ , прямая  $KL$  параллельна прямой  $AC$ . Точки  $R$  — точка пересечения  $KM$  и  $AB$ ,  $T$  —  $BC$  и  $ML$ .
- Доказать, что прямая  $RT$  параллельна прямой  $AC$ .
  - Найти площадь треугольника  $ABC$ , если  $\frac{KL}{AC} = 3$  и площадь четырехугольника  $BTMR$  равна 24.
58. Отрезок  $AB$  является диаметром окружности. Точки  $C$  и  $D$  окружности расположены по разные стороны от прямой  $AB$ , длины хорд  $AC$  и  $BD$  равны 2 и 4 соответственно. Хорда  $CD$  пересекает  $AB$  в точке  $E$ , причем  $AE : EB = 1 : 3$ .
- Доказать, что если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.
  - Найти радиус окружности.

59. Прямоугольный треугольник  $ABC$  расположен относительно трех концентрических окружностей  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  радиусов 3, 5 и 6 так, что: 1) гипотенуза  $AB$  является хордой  $K_2$  и касается окружности  $K_1$ ; 2) вершина  $C$  принадлежит окружности  $K_3$ .

- Найти площадь треугольника  $ABC$ .
- Доказать, что центр окружностей и вершина  $C$  лежат по разные стороны от гипотенузы.

60. В правильный треугольник со стороной  $a$  вписан круг. В этот круг вписан правильный треугольник, в который вписан круг и так далее.

- Доказать, что площади кругов образуют геометрическую прогрессию.
- Найдите сумму площадей всех кругов.

61. Первая окружность вписана в треугольник  $ABC$  и касается  $BC$  в точке  $M$ . Вторая окружность касается  $BC$  в точке  $N$  и продолжений сторон  $AC$  и  $AB$ .

- Докажите, что длина  $MN$  равна модулю разности длин  $AB$  и  $AC$ .
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что радиусы окружностей относятся как  $1 : 3$ ,  $BC = 12$ ,  $MN = 4$ .

62. Дан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Точка  $P$  — середина стороны  $AF$ , точка  $K$  — середина стороны  $AB$ .

- Докажите, что площади четырехугольников  $DPFE$  и  $DPAK$  равны.
- Найдите площадь общей части четырехугольников  $DPAK$  и  $DEAC$ , если известно, что  $AB = 6$ .

63. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются друг друга в точке  $A$ , при этом  $O_1$  лежит на  $\omega_2$ .  $AB$  — диаметр  $\omega_1$ . Хорда  $BC$  первой окружности касается  $\omega_2$  в точке  $P$ . Прямая  $AP$  вторично пересекает  $\omega_1$  в точке  $D$ .

- Докажите, что  $AP = DP$ .
- Найдите площадь четырехугольника  $ABDC$ , если известно, что  $AC = 4$ .

64. Точки  $M$  и  $P$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Диагональ  $AC$  проходит через середину отрезка  $MP$ .

- Докажите, что площади треугольников  $ABC$  и  $ACD$  равны.
- Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABM$ , если известно, что  $AB = 12$ ,  $BC = 10$ , а площадь четырехугольника  $AMCP$  равна 60.

65. Окружность, вписанная в трапецию  $ABCD$ , касается боковых сторон  $AB$  и  $CD$  в точках  $K$  и  $M$ .

- Докажите, что сумма квадратов расстояний от центра окружности до вершин трапеции равна сумме квадратов длин боковых сторон трапеции.
- Найдите площадь трапеции  $ABCD$ , если известно, что  $AK = 9$ ,  $BK = 4$ ,  $CM = 1$ .

66. Дан квадрат  $ABCD$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  внешним и внутренним образом соответственно построены равнобедренные треугольники  $ABK$  и  $BCP$ .

- Докажите, что точка  $P$  лежит на прямой  $DK$ .
- Найдите площадь четырехугольника  $PKBC$ , если известно, что  $AB = 2$ .

67. Диагонали прямоугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  описаны около треугольников  $AOB$  и  $BOC$  соответственно. Пусть  $O_1$  — центр окружности  $\omega_1$ , а  $O_2$  — центр окружности  $\omega_2$ .

- Докажите, что прямая  $BO_1$  касается окружности  $\omega_2$ , а прямая  $BO_2$  касается окружности  $\omega_1$ .
- Найдите длину отрезка  $O_1O_2$ , если известно, что  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ .

68. В прямоугольнике  $ABCD$  на стороне  $BC$  отмечена точка  $K$  так, что  $BK = 2CK$ .

- Докажите, что  $BD$  делит площадь треугольника  $AKC$  в отношении  $3 : 7$ .
- Пусть  $M$  — точка пересечения  $AK$  и  $BD$ ,  $P$  — точка пересечения  $DK$  и  $AC$ . Найдите длину отрезка  $MP$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ .

69. Из середины  $D$  гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий катет  $AC$ . На нем отложен отрезок  $DE$ , длина которого равна половине отрезка  $AB$ . Длина отрезка  $CE$  равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов.

- Докажите, что угол  $ACE$  равен  $45$  градусов.
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

70. Радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности равен  $\frac{\sqrt{15}}{3}$ . Окружность радиуса  $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$  касается вписанной в треугольник  $ABC$  окружности в точке  $T$ , а также касается лучей, образующих угол  $ACB$ . Окружности касаются прямой  $AC$  в точках  $K$  и  $M$ .

- Докажите, что треугольник  $KTM$  прямоугольный.
- Найдите тангенс угла  $ABC$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $3\sqrt{15}$ , а наибольшей из его сторон является сторона  $AC$ .

71. Треугольник  $ABC$  ( $AB < AC$ ) вписан в окружность. На стороне  $AC$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE = AB$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $CE$  пересекает дугу  $BC$ , не содержащую точки  $A$ , в точке  $K$ .

- Докажите, что  $AK$  является биссектрисой угла  $BAC$ .
- Найдите площадь четырехугольника  $ABKE$ , если известно, что  $AB = 5$ ,  $AC = 11$ ,  $BC = 10$ .

72.  $AK$  — биссектриса треугольника  $ABC$ , причем  $BK:KC = 2:7$ . Из точек  $B$  и  $K$  проведены параллельные прямые, которые пересекают сторону  $AC$  в точках  $D$  и  $F$  соответственно, причем  $AD:FC = 3:14$ .

- Докажите, что  $AB$  в 2 раза больше  $AD$ .
- Найдите площадь четырехугольника  $DBKF$ , если  $P$  — точка пересечения  $BD$  и  $AK$  и площадь треугольника  $ABP$  равна 27.

73. Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  равна 3,  $BC = 2AC$ ,  $E$  — точка пересечения продолжения биссектрисы  $CD$  данного треугольника с описанной около него окружностью, причем  $DE = 1$ .

- Докажите, что  $AE \parallel BC$ .
- Найдите длину стороны  $AC$ .

74. Серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ADB$ , касается отрезка  $AD$  в точке  $P$ , а прямая  $OP$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что около четырехугольника  $BDOK$  можно описать окружность.

- Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 10$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ .

75. В тупоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C$  — тупой) на высоте  $BH$  как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны  $AB$  и  $CB$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно.

- Докажите, что  $\sin \angle ABC = \frac{PH}{BC} - \frac{KH}{BA}$ .

- Найдите длину отрезка  $PK$ , если известно, что  $BA = 13$ ,  $BC = 8$ ,  $\sin \angle ABC = \frac{7\sqrt{3}}{26}$ .

76. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BK$  и на сторонах  $BA$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $P$  так, что  $\angle AKM = \angle CKP = \frac{1}{2} \angle ABC$ .

- Докажите, что прямая  $AC$  касается окружности, описанной около треугольника  $MBP$ .
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $MBP$ , если известно, что  $AB = 10$ ,  $BC = 15$ ,  $AC = 20$ .

77. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отметили точку  $D$  так, что  $BC = \sqrt{AC \cdot CD}$ .

- Докажите, что углы  $BAD$  и  $CBD$  равны.
- Найдите отношение отрезков биссектрисы  $CL$  треугольника  $ABC$ , на которые ее делит прямая  $BD$ , если известно, что  $BC = 6$ ,  $AC = 9$ .

78. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  больше стороны  $BC$ . Биссектриса  $CL$  пересекает описанную около треугольника  $ABC$  окружность в точке  $K$ . На стороне  $AC$  отмечена точка  $P$  так, что  $\angle ALK = \angle CLP$ .

- Докажите, что точки  $A$ ,  $P$ ,  $L$ ,  $K$  лежат на одной окружности.
- Найдите площадь четырехугольника  $APLK$ , если  $BC = 4$ ,  $AB = 5$ ,  $AC = 6$ .

79. На диагонали  $LN$  параллелограмма  $KLMN$  отметили точки  $P$  и  $Q$ , причем  $LP = PQ = QN$ .

- Докажите, что прямые  $KP$  и  $KQ$  проходят через середины сторон параллелограмма.
- Найдите отношение площади параллелограмма  $KLMN$  к площади пятиугольника  $MRPQS$ , где  $R$  — точка пересечения  $KP$  со стороной  $LM$ ,  $S$  — точка пересечения  $KQ$  с  $MN$ .

80. Точка  $M$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ , вершина  $A$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$  лежат на одной окружности.

- Докажите, что треугольники  $AKB$  и  $BKM$  подобны, где  $K$  — середина стороны  $BC$ .
- Найдите длину  $AK$ , если  $BC = 6\sqrt{3}$ .

81. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  в точках  $C_1$ ,  $B_1$  и  $A_1$  соответственно. Биссектриса угла  $A$  пересекает эту окружность в точке  $Q$ , лежащей внутри треугольника  $AB_1C_1$ .

- Докажите, что  $C_1Q$  — биссектриса угла  $AC_1B_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $O$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $AB_1C_1$ , если известно, что  $BC = 9$ ,  $AB = 10$ ,  $AC = 17$ .

82. Отрезок  $AD$  является биссектрисой прямоугольного треугольника  $ABC$  (угол  $C = 90^\circ$ ). Окружность радиуса  $\sqrt{15}$  проходит через точки  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$  так, что  $AE : AB = 3 : 5$ . Отрезки  $CE$  и  $AD$  пересекаются в точке  $O$ .

- Докажите, что  $CO = OE$ .
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

83. Биссектриса  $AD$  и высота  $BE$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  проходит через вершину  $A$ , середину стороны  $AC$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$  так, что  $AK : KB = 1 : 3$ .

- Докажите, что  $AD$  делит площадь треугольника  $ABC$  в соотношении  $1 : 2$ .
- Найдите длину стороны  $BC$ , если радиус окружности  $R = \sqrt{2}$ .

84. В треугольнике  $ABC$ , где  $AB = BC = 3$ ,  $\angle ABC = \arccos \frac{1}{9}$  проведена медиана  $AD$  и биссектриса  $CE$ , пересекающиеся в точке  $M$ . Через  $M$  проведена прямая, параллельная  $AC$  и пересекающая стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно.

- Найдите  $PM$ .
- Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $PQB$ .

85. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  тупой, а точка  $D$  выбрана на продолжении  $AB$  за точку  $B$  так, что  $\angle ACD = 135^\circ$ . Точка  $D$  симметрична точке  $D'$  относительно прямой  $BC$ , точка  $D''$  симметрична точке  $D'$  относительно прямой  $AC$  и лежит на прямой  $BC$ . Известно, что  $\sqrt{3} \cdot BC = CD''$ ,  $AC = 6$ .

- Докажите, что треугольник  $CBD$  — равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

86. Продолжения медиан  $AM$  и  $BK$  треугольника  $ABC$  пересекают описанную около него окружность в точках  $E$  и  $F$  соответственно, причем  $AE : AM = 2 : 1$ ,  $BF : BK = 3 : 2$ .

- Докажите, что прямая  $AB$  параллельна прямой  $CE$ .
- Найти углы треугольника  $ABC$ .

87. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  расположены точки  $E$  и  $D$  соответственно так, что  $AD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $DE$  — биссектриса треугольника  $ABD$ ,  $AE = ED = \frac{9}{16}$ ,  $CD = \frac{3}{4}$ .

- Найдите  $AC$ .
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

88. В окружности с центром в точке  $O$  радиуса 4 проведены хорда  $AB$  и диаметр  $AK$ , образующий с хордой угол  $\frac{\pi}{8}$ . В точке  $B$  проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра  $AK$  в точке  $C$ .

- Докажите, что треугольник  $OBC$  — равнобедренный
- Найдите длину медианы  $AM$  треугольника  $ABC$ .

89. Высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Окружность с центром в точке  $O$  проходит через вершину  $A$ , касается стороны  $BC$  в точке  $K$  и пересекает сторону  $AC$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MC = 4 : 1$ .

- Найдите отношение  $CK : KB$ .
- Найдите длину стороны  $AB$ , если радиус окружности равен 2.

90. Четырехугольник, один из углов которого равен  $\arccos \left( \frac{3}{5} \right)$ , вписан в окружность радиуса  $2\sqrt{10}$  и описан около окружности радиуса 3.

- Найдите площадь четырехугольника.
- Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

91. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = BC = 5$ , медиана  $AD = \frac{\sqrt{97}}{2}$ . На биссектрисе  $CE$  выбрана точка  $F$  такая, что  $CE = 5CF$ . Через точку  $F$  проведена прямая  $l$ , параллельная  $BC$ .

- Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника  $ABC$  до прямой  $l$ .
- Найдите, в каком отношении прямая  $l$  делит площадь треугольника  $ABC$ .

92. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из точки  $E$ , расположенной в середине катета  $BC$ , опущен перпендикуляр  $EL$  на гипотенузу  $AB$ ,  $AE = \sqrt{10}EL$ ,  $BC > AC$ .

- Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- Найдите отношение  $\frac{AE}{CL}$ .

93. На катете  $ML$  прямоугольного треугольника  $KLM$  как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону  $KL$  в точке  $P$ . На стороне  $KM$  взята точка  $R$  так, что отрезок  $LR$  пересекает окружность в точке  $Q$ , причем отрезки  $QP$  и  $ML$  параллельны,  $KR = 2RM$  и  $ML = 8\sqrt{3}$ .

- Найдите отношение  $LP : PK$ .
- Найти  $MQ$ .

94. Окружность, построенная на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Прямые  $CM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $O$  — середина  $AP$ .

- Докажите, что треугольник  $OMN$  равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника  $OMN$ , если известно, что  $AM = 3$ ,  $BM = 9$ ,  $AN = 4$ .

95. В треугольнике  $ABC$  длина  $AB$  равна 3,  $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$ , хорда  $KN$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , пересекает отрезки  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $L$  соответственно. Известно, что  $\angle ABC = \angle CML$ , площадь четырехугольника  $ABLM$  равна 2, а длина  $LM$  равна 1.

- Найдите высоту треугольника  $KNC$ , опущенную из вершины  $C$ .
- Найдите площадь треугольника  $KNC$ .

96. В окружность с центром  $O$  вписан треугольник  $ABC$  ( $\angle A > \frac{\pi}{2}$ ). Продолжение биссектрисы  $AF$  угла  $A$  этого треугольника пересекает окружность в точке  $L$ , а радиус  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $E$ . Пусть  $AH$  — высота треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AL = 4\sqrt{2}$ ,  $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$ ,  $\angle AEH = \frac{\pi}{3}$ .

- Докажите, что  $AF$  — биссектриса угла  $EAH$ .
- Найдите отношение площади треугольника  $OAL$  к площади четырехугольника  $OEFL$ .

97. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 6. Пусть  $E$  — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку  $E$  и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание  $BC$  в точке  $P$ , а большее основание  $AD$  — в точке  $Q$ . Точка  $F$  лежит на отрезке  $EC$ , причем  $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$ .

- Докажите, что прямая  $EQ$  точками пересечения делит основания трапеции пополам.
- Найдите площадь треугольника  $EPF$ .

98. Отрезок  $KB$  является биссектрисой треугольника  $KLM$ . Окружность радиуса 5 проходит через вершину  $K$ , касается стороны  $LM$  в точке  $V$  и пересекает сторону  $KL$  в точке  $A$ . Известно, что  $ML = 9\sqrt{3}$ ,  $KA : LB = 5 : 6$ .

- Найдите угол  $K$  треугольника  $KLM$ .
- Найдите площадь треугольника  $KLM$ .

99. Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет  $BC$  в точке  $N$ .

- Докажите, что  $\angle CAN = \angle CMN$ .
- Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ANB$  и  $CBM$ , если  $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$ .

100. Точка  $O$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $BH$  — высота этого треугольника.

- Докажите, что углы  $ABH$  и  $CBO$  равны.
- Найдите  $BH$ , если  $AB = 16$ ,  $BC = 18$ ,  $BH = BO$ .

101. Окружность радиуса  $2\sqrt{3}$  касается сторон  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $K$  и  $P$  и пересекает сторону  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  (точка  $N$  между точками  $B$  и  $M$ ). Известно, что  $MP$  и  $AC$  параллельны,  $CK = 2$ ,  $BP = 6$ .

- Найдите угол  $BCA$ .
- Найдите площадь треугольника  $BKN$ .

102. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$ ,  $BC > AC$ . На катете  $BC$  взята точка  $K$  такая, что  $\angle MKC = \angle BAC$ .

- Докажите, что угол  $KMC$  прямой.
- Пусть  $N$  — вторая (помимо  $M$ ) точка пересечения прямой  $CM$  и описанной окружности треугольника  $BMK$ . Найдите угол  $ANB$ .

103. В трапеции  $ABCD$  отношение оснований  $AD : BC = 5 : 2$ . Точка  $M$  лежит на  $AB$ , площадь трапеции  $ABCD$  равна 20.

- Докажите, что площадь треугольника  $MCD$  не превосходит 15.
- Найдите отношение  $AM : MB$ , если известно, что площадь треугольника  $MCD$  равна 9.

104. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = BC$ , пересекаются в точке  $O$ . Отрезок  $AO = 5$ , а длина высоты  $AD$  равна 8.

- Докажите, что длина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  равна высоте, опущенной на нее из вершины  $B$ .
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

105. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AD$  и  $CE$ , пересекающиеся в точке  $P$ . Известно, что  $AC = 26$ ,  $DE = 10$ .

- Найдите отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $DEP$  и  $ACP$ .
- Найдите расстояние между серединами отрезков  $AC$  и  $DE$ .

106. В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $40^\circ$ , отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты, точки  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  пересекаются в точке  $K$ .

- Докажите, что точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  лежат на одной окружности.
- Найдите угол  $B_1KB_2$ .

107. Точки  $P$  и  $Q$  расположены на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$ . Точка  $R$  делит сторону  $AC$  этого треугольника так, что  $AR : RC = 1 : 2$ . Точки  $S$  и  $T$  — точки пересечения прямой  $BR$  с прямыми  $AP$  и  $AQ$  соответственно.

- Докажите, что площади треугольников  $ABS$  и  $AST$  равны.
- Найдите отношение площади четырехугольника  $PQTS$  к площади треугольника  $ABC$ .

108. Два одинаковых правильных треугольника  $ABC$  и  $CDE$  расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку  $C$ , и угол  $BCD$  меньше, чем  $\frac{\pi}{3}$ . Точка  $K$  — середина отрезка  $AC$ , точка  $L$  — середина отрезка  $CE$ , точка  $M$  — середина отрезка  $BD$ .

- Докажите, что треугольник  $KLM$  — равносторонний.
- Найдите длину отрезка  $BD$ , если площадь треугольника  $KLM$  равна  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ , а сторона треугольника  $ABC$  равна 1.

109. В треугольнике  $ABC$ , площадь которого равна 2, на медианах  $AK$  и  $BL$  и  $CN$  взяты соответственно точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  так, что  $AP = PK$ ,  $BQ : QL = 1 : 2$ , а  $CR : RN = 5 : 4$ .

- Докажите, что  $MR : CN = 1 : 9$ .
- Найдите площадь треугольника  $PQR$ .

110. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведены биссектрисы  $AK$ ,  $BM$ ,  $CP$ .

- а) Докажите, что треугольник  $KMP$  — равнобедренный.
- б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $KMP$  равна 12, а косинус угла  $ABC$  равен 0,6.