Гилемханов Р. Г. (Москва)

ПО СЛЕДАМ ОДНОЙ ИНТЕРЕСНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В одной из стартовых работ по математике, предложенных учащимся 10-х классов СтатГрадом в 2020/2021 учебном году, была задача, которая вызвала большой интерес десятиклассников и учителей. Напомним её условие.

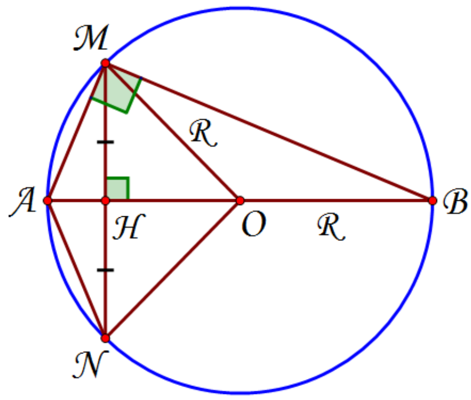
Диаметр *AB* окружности с центром в точке *O* пересекает хорду *MN* этой окружности в точке *H* так, что *MH* = *NH*. Найдите *MO*, если *MB* = 21, *HB* = 15.

При обсуждении решений, предложенных обучающимися, возник спор такого характера:

— должен ли школьник при решении этой задачи доказать, что заданные диаметр и хорда взаимно перпендикулярны?

— нужно ли рассматривать случай, когда хорда MN проходит через центр окружности, т. е. одновременно служит и диаметром?

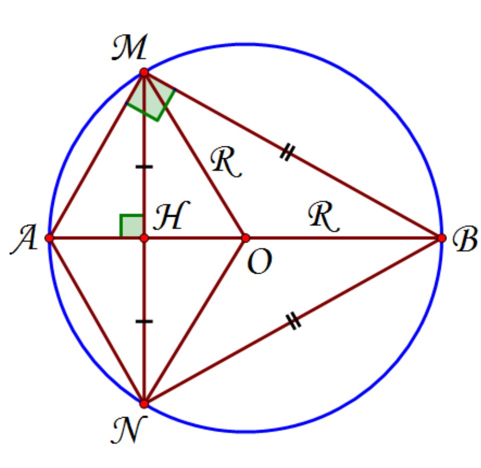
В данной статье мы попытаемся ответить на эти вопросы. И одновременно приведём несколько вариантов решений этой, как нам показалось, весьма интересной задачи. Вначале заметим, что MO это радиус заданной окружности, обозначим его буквой R.



Решение. Соединим отрезками точки M и N с центром окружности, а также с точкой A (см. рис). В треугольнике MON $MO = NO = R$, следовательно, этот треугольник равнобедренный, в котором отрезок OH — медиана по условию. Но тогда OH является также высотой этого треугольника. То есть $OH \perp MN$, $AB \perp MN$.

Применим теорему Пифагора к треугольнику MHB, получим: $MH^2 = MB^2 - BH^2 = 441 - 225 = 216.$ Заметим, что AMB — вписанный, опирающийся на диаметр, следовательно, $\angle AMB = 90°$. Высота MH прямоугольного треугольника AMB, опущенная из вершины прямого угла M на гипотенузу AB, является средней пропорциональной величиной между проекциями катетов AH и BH на гипотенузу AB. Значит, $MH^2 = AH \cdot BH = (2R - 15) \cdot 15 = 30R - 225 = 216$, тогда $30R = 441$, откуда $R = 14,7$.

Далее, считая доказанной перпендикулярность AB и MN, приведём ещё несколько способов нахождения длины отрезка MO.



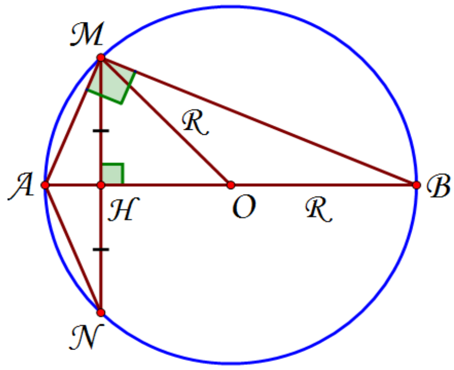
Способ 1. Соединим отрезком точки B и N (см. рис. 2). Из соображений симметрии окружности относительно диаметра AB имеем: $BN = BM = 21$; $MN = 2MH = 2\sqrt{216} = 12\sqrt{6}$. Найдём площадь треугольника: $S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} MN \cdot BH = 6\sqrt{6} \cdot 15 = 90\sqrt{6}$.

Так как треугольник MBN — вписанный, $S_{\Delta MBN} = \dfrac{MN \cdot BM \cdot BN}{4R}$, откуда

$$R = \frac{MN \cdot BM \cdot BN}{4S(MBN)} = \frac{12\sqrt{6} \cdot 21 \cdot 21}{4 \cdot 90\sqrt{6}} = 14,7.$$

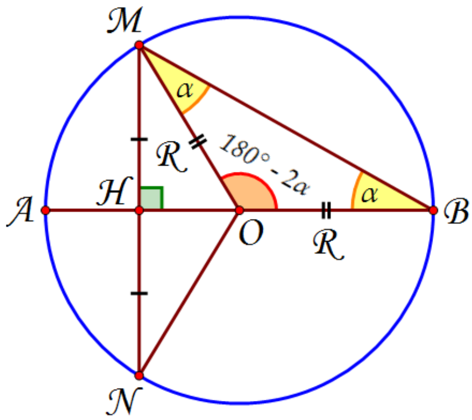
Замечание: здесь использована формула для радиуса описанной окружности треугольника [4, с. 187]

Способ 2. Угол AMB — вписанный, опирающийся на диаметр (см. рис. 3), значит, $\angle AMB = 90°$. В треугольнике AMB катет MB является средней пропорциональной величиной между гипотенузой AB (она же является диметром окружности) и проекцией катета MB на гипотенузу AB, то есть $MB^2 = AB \cdot BH = 2R \cdot BH$, откуда



$$R = \frac{MB^2}{2BH} = \frac{441}{30} = 14,7.$$

Способ 3. Обозначим α равные углы MBO и BMO (см. рис. 4), тогда $\angle MOB = 180° - 2\alpha$. В прямоугольном треугольнике BHM найдём



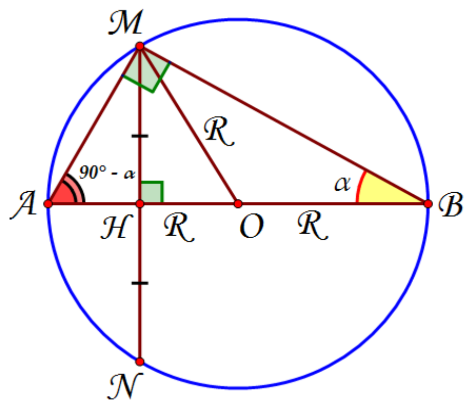
$$\cos\alpha = \frac{BH}{BM} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

Применим теорему косинусов к треугольнику MOB:

$$MB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 2R^2(1 + \cos 2\alpha) =$$
$$= 2R^2 \cdot 2\cos^2\alpha = (2R\cos\alpha)^2.$$

Следовательно, $MB = 2R\cos\alpha$, откуда $R = \dfrac{MB}{2\cos\alpha} = \dfrac{21}{2 \cdot (5/7)} = 14,7.$

Способ 4. Если $\angle MBA = \alpha$ (см. рис. 5). то $\angle MAB = 90° - \alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{BH}{BM}$. В соответствии со следствием из теоремы синусов в треугольнике AMB находим



$$\frac{BM}{\sin(90° - \alpha)} = 2R, \quad \frac{BM}{2\cos\alpha} = R,$$

$$R = \frac{BM^2}{2BH} = \frac{21 \cdot 21}{2 \cdot 15} = \frac{7 \cdot 21}{2 \cdot 5} = 14,7.$$

Перейдём теперь к обсуждению поставленных вначале вопросов. С целью разрешения расхождений во взглядах на основания нынешней школьной планиметрии, возникших у школьников и учителей, мы пролистали несколько учебников разных поколений, а также некоторые нормативные документы, регулирующие оценки письменных экзаменационных работ выпускников на ЕГЭ. И обнаружили следующее.

1. Диаметр окружности во все времена являлся хордой по определению. Таковым является и сейчас. Следовательно, мы не можем сказать, что диаметр *AB,* о котором говорится в условии рассматриваемой задачи, не является хордой.

Теоремы, связанные с перпендикулярностью диаметра и хорды одной и той же окружности, мы обнаружили в учебниках А. П. Киселёва и Н. Н. Никитина. Однако в учебниках, изданных с начала модернизации школьного математического образования под руководством академика А. Н. Колмогорова в 70-х годы прошлого столетия, найти их нам не удалось, Исключение составляет учебник для 7-го класса коллектива авторов под руководством А. Г. Мерзляка.

2. В настоящее время у выпускников, готовящихся к ЕГЭ по математике профильного уровня, нередко возникает такой вопрос: какими математическими фактами можно пользоваться без ссылки и доказательства при решении задач с развёрнутым ответом? Ответ на данный вопрос имеется в Спецификации контрольных измерительных материалов для проведения ЕГЭ

по математике (профильный уровень), ежегодно разрабатываемой Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ). Такой документ имеется и на этот учебный год. И вот что говорится в пункте 2 этого нормативного документа, обязательного для выполнения обучающимися, а также экспертами, проверяющими и оценивающими работы сдающих ЕГЭ:

«При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования».

Лишь в одном учебнике А. Г. Мерзляка [7; с. 131], как было сказано выше, хотя знакомом, быть может, лишь небольшому числу десятиклассников, нам удалось найти теорему в такой формулировке: *«Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде».* Казалось бы, мы нашли то, что искали. Однако оказалось, что эта теорема предложена учащимся для самостоятельного доказательства. Следовательно, использование этого факта без ссылки и доказательства, уверены мы, ставит ученика в не очень удобное положение. Эксперты могут такое решение не засчитать.

Мало того, в процессе поисков мы обнаружили, что приказом министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2020 № 249 в Федеральный перечень учебников, ранее утверждённый приказом Минпросвещения 28.12.2018 № 345, были внесены изменения, в результате которых замечательные учебники геометрии 7—9 И. Ф. Шарыгина, а также все учебники авторского коллектива под руководством А. Г. Мерзляка оказались с 1-го сентября 2020-го года исключёнными из Федерального перечня.

В результате мы и пришли к следующей мысли: при решении предложенной задачи доказательство факта перпендикулярности диаметра AB и хорды MN необходимо.

3. Нас интересовал также вопрос о возможности совпадения точек O и H в контексте рассматриваемой задачи. Перелистывая первые же страницы учебников геометрии всех поколений, известных нам, мы вспомнили основное свойство прямой (аксиому) вот в какой формулировке: «Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну... Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д. будем иметь в виду, что это разные точки и разные прямые. Случай их совпадения будем оговаривать особо» [7; с. 9, 10].

Именно такие, т. е. аналогичные формулировки основных свойств первичных неопределяемых геометрических понятий приводятся во всех других учебниках, адресованных нынешним школьникам. Подобные оговорки тоже. Таким образом, в задаче, которая рассмотрена нами выше, совпадение точек O и H невозможно.

Литература:

1. Киселев А. П. Геометрия. Часть первая. Планиметрия : Учеб. для 6 --9-го кл. средн. шк. М.: Учпедгиз. 1959.

2. Никитин Н. Н. Геометрия : Учеб. для 6—8 кл. М. : Просвещение. 1971.

3. Колмогоров А. Н. и др. Геометрия : Учеб. пособие для 6--8 кл. сред. шк. М. : Просвещение, 1981.

4. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7—9 кл. общеобразоват. учреждений. М. : Просвещение, 2011.

5. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. органи- заций -- М. : Просвещение, 2014.

6. Шарыгин И. Ф. Геометрия 7—9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений -- М. : Дрофа, 2013.

7. Мерзляк А. Г. и др. Геометрия : 7 класс : Учеб. для общеобразоват. учреждений -- М. : Вентана_Граф, 2015.

8. Смирнова И. М. Геометрия. 7—9 классы : Учеб. для общеобразоват. учреждений -- М. : Мнемозина. 2007.