Гилемханов Р. Г., Москва

ЗАДАЧИ О БАНКОВСКИХ ВКЛАДАХ И КРЕДИТАХ

Среди задач с экономическим содержанием о банковских вкладах и кредитах часто встречаются задачи следующих двух типов.

Задача 1. Клиент в банке взял кредит на срок n месяцев (лет, иной срок). В конце каждого месяца (года, иного срока) общая сумма оставшегося долга увеличивается на p %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную клиентом. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца (года, иного срока) подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц (год, иной срок) уменьшалась равномерно, т. е. на одну и ту же величину. Найти…

Задача 2. Клиент взял кредит в банке на n лет (месяцев) под p % годовых (месячных). Схема выплаты кредита: по истечении 1 года (месяца) банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает долг на p %, затем клиент переводит в банк Φ у. е. Какой должна быть сумма Φ, чтобы клиент выплатил долг n равными платежами?

Для решения задач такого типа, следует детально разобраться в «механизмах» этих финансовых взаимоотношений. Поразмыслим, что же происходит на самом деле? Можно ли найти математическую модель? Конечно. Для определённости будем говорить о месяцах или годах, при необходимости в дальнейших рассуждениях слово «месяцев» можно заменить на «лет», а «ежемесячно» на «ежегодно» и наоборот.

Приступим к обсуждению задачи 1.

Пусть сумма кредита S у. е. За n месяцев клиент выплачивает ежемесячно банку некоторую сумму, которая имеет две составляющие. Первая составляющая — фиксированная сумма равная $\frac{S}{n}$ у. е. Вторая составляющая — выплата процентной ставки, которая равномерно уменьшается из-за фиксированной т. е. равномерной выплаты за каждый месяц в размере $\frac{S}{n}$ у. е. Эта сумма равна величине $0,01p$, умноженной на сумму оставшегося долга клиента.

В первый месяц выплаты долга эта составляющая равна $0,01p\cdot S$ у. е.

Во второй месяц — $0,01p\cdot\frac{n-1}{n}\cdot S$ у. е.

В третий месяц — $0,01p\cdot\frac{n-2}{n}\cdot S$ у. е.

...

В n-й (последний) месяц — $0,01p\cdot\frac{1}{n}\cdot S$ у. е.

Таким образом, равномерность уменьшения долга клиента обусловлена только лишь равномерным уменьшением размера процентной ставки в зависимости от также равномерно уменьшаемого долга клиента из месяца в месяц.

Найдём всю сумму такой составляющей, выплачиваемой клиентом банку за весь период кредитования:

$$0,01pS+0,01p\cdot\frac{n-1}{n}\cdot S+0,01p\cdot\frac{n-2}{n}\cdot S+\ldots+0,01p\cdot\frac{2}{n}\cdot S+0,01p\cdot\frac{1}{n}\cdot S=$$
$$=0,01pS\left(1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right).$$

В последнем произведении выражение, заключённое в скобки, есть сумма первых n членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 1, а последний член равен $\frac{1}{n}$. Найдём эту сумму:

$$S_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \cdot n = \frac{n+1}{2n} \cdot n = \frac{n+1}{2}.$$

Итак, вся сумма, выплаченная банку клиентом за период кредитования (обозначим этот параметр буквой B) выражается формулой:

$$B = S + 0{,}01pS \cdot \frac{n+1}{2} = S + 0{,}005(n+1)S = S(1+0{,}005p(n+1)).$$

Тем самым, мы получили расчётную формулу, которая связывает сумму кредита S, процентную месячную ставку p, срок кредитования n и сумму, выплаченную банку клиентом за вест период кредитования B.

Приведём примеры.

Пример 1. Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга за каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

Решение:

$$\frac{B}{S} \cdot 100 = \frac{S(1+0{,}005p(n+1)) \cdot 100}{S} = 100 + 0{,}5 \cdot 12 \cdot (9+1) = 100 + 60 = 160\,.$$

Ответ: 160%.

Пример 2. Иван взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Иваном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга за каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. За весь срок кредитования Иван выплатил банку в общей сложности 16 875 рублей. Какую сумму он взял в кредит?

Решение:

$$S(1+0{,}005p(n+1)) = B \;\Leftrightarrow\; S = \frac{B}{1+0{,}005p(n+1)};$$

$$S = \frac{16\,875}{1+0{,}005 \cdot 10 \cdot (6+1)} = \frac{16\,875}{1+0{,}05 \cdot 7} = \frac{16\,875}{1{,}35} = \frac{1\,687\,500}{135} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 135 \cdot 100}{135} = 12\,500.$$

Ответ: 12 500 рублей.

Замечание: при разложении числа 16 875 на простые множители нет надобности «доходить до конца». Как только на «горизонте» появится число 135 желательно остановиться.

Пример 3. Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга за каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Решение:

$$\frac{B-S}{S}\cdot 100=63 \Leftrightarrow \left(\frac{B}{S}-1\right)\cdot 100=63 \Leftrightarrow \frac{100B}{S}=163;$$

$$\frac{100\cdot S\cdot(1+0,005p(n+1))}{S}=163 \Leftrightarrow 100+0,5p\cdot 7=163 \Leftrightarrow 0,5p\cdot 7=63 \Leftrightarrow p=18.$$

Ответ: 18%.

Теперь обсудим задачу типа 2.

Итак, клиент взял кредит в банке на 3 года под p % в год. Схема выплаты кредита: по истечении 1 года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает долг на p %, затем клиент переводит в банк *Ф* у. е. Какой должна быть сумма *Ф*, чтобы клиент выплатил долг тремя равными платежами?

Пусть клиент взял кредит S у. е. Для удобства в расчётах введём обозначение $m=(1+0,01p)$. По истечении месяца банк начислил процентную ставку. Долг стал Sm у. е., клиент перевёл в банк *Ф* у. е., после чего долг клиента стал $Sm-\Phi$ у. е.

В начале следующего месяца банк вновь начислил процентную ставку. Долг клиента стал $(Sm-\Phi)\cdot m=Sm^2-\Phi m$ у. е., клиент перевёл в банк *Ф* у. е. Долг стал $Sm^2-\Phi m-\Phi$ у. е.

Наступил новый месяц. Банк очередной раз начислил процентную надбавку. Долг стал $Sm^3-\Phi m^2-\Phi m$ у. е., клиент, заплатив *Ф* у. е., погасил этот последний долг и рассчитался с банком полностью. Следовательно, имеем уравнение: $Sm^3-\Phi m^2-\Phi m=\Phi.$ Решив это уравнение относительно *Ф*, получим: $\Phi=\dfrac{Sm^3}{m^2+m+1}$ или с учётом замены, введённой выше:

$$\Phi=\frac{S(1+0,01p)^3}{(1+0,01p)^2+(1+0,01p)+1}.$$

Приведём примеры.

Пример 1. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 40 492 800 рублей в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг 12%), затем Сергей переводит в банк *x* рублей. Какой должна быть сумма *x,* чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение:

$$x=\frac{S(1+0,01p)^3}{(1+0,01p)^2+(1+0,01p)+1}.$$

$$x=\frac{40\,492\,800\cdot 1,12^3}{1,12^2+1,12+1}=\frac{40\,492\,800\cdot 1,12^3}{3,3744}=12\,000\,000\cdot\frac{112}{100}\cdot\frac{112}{100}\cdot\frac{112}{100}=12\cdot 112^3=16\,859\,136.$$

Ответ: 16 859 136 р.

Пример 2. 8 марта Лёня Голубков взял в банке 53 680 рублей в кредит на 4 года под 20% годовых, чтобы купить своей жене Рите новую шубу. Схема выплаты кредита следующая: утром 8 марта следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), а вечером того же дня Лёня переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа (все четыре года эта сумма одинакова). Какую сумму сверх взятых 53 680 рублей должен будет выплатить банку Лёня Голубков за эти четыре года?

Решение. Перепишем формулу

$$\Phi=\frac{S(1+0,01p)^3}{(1+0,01p)^2+(1+0,01p)+1}$$

для случая $n = 4$:

$$\Phi = \frac{S(1+0,01p)^4}{(1+0,01p)^3 + (1+0,01p)^2 + (1+0,01)^3 + 1} \quad (*)$$

и найдём размер ежегодных платежей Лёни:

$$\Phi = \frac{53\,680 \cdot 1,2^4}{1,2^3 + 1,2^2 + 1,2 + 1} = \frac{53\,680 \cdot 1,2^4}{1,2 \cdot (1,2^2 + 1,2 + 1) + 1} = \frac{53\,680 \cdot 1,2^4}{1,2 \cdot (1,44 + 2,2) + 1} = \frac{53\,680 \cdot 1,2^4}{1,2 \cdot 3,64 + 1} =$$

$$\frac{53\,680 \cdot 1,2^4}{5,368} = 10\,000 \cdot 1,2^4 = 12^4 = 144^2 = (150-6)^2 = 22\,500 - 1800 + 36 = 20\,736. \text{ (руб.).}$$

Теперь вычислим искомую разницу: $20\,736 \cdot 4 - 53\,680 = 29\,264$ руб.

Ответ: 29 264 руб.

Замечания.

1. Конечно, запоминать эти формулы надобности нет. А рассуждения пригодятся.
2. Формулу (*) можно обобщить для любого натурального n, доказав её используя принцип математической индукции.

В общем виде формула примет вид

$$\Phi = \frac{S(1+0,01p)^n}{(1+0,01p)^{n-1} + (1+0,01p)^{n-2} + \ldots + (1+0,01p)^1 + 1}.$$

Приведём примеры использования обобщённой формулы.

Пример 1. В июле планируется взять в кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: 1) каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года; 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга. Найдите число r, если известно, что если каждый год выплачивать по 1 464 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 2 674 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года.

Решение. Если ежегодная фиксированную сумму, подлежащую выплате банку обозначить Φ, сумму кредита S, процентную ставку банка p, количество лет, на который взят кредит n, то справедлива формула:

$$\Phi = \frac{S(1+0,01r)^n}{(1+0,01r)^{n-1} + (1+0,01r)^{n-2} + \ldots + (1+0,01r) + 1}. \quad \mathbf{(*)}$$

Введём замену переменной: пусть $(1+0,01r) = m > 0$. Если кредит будет погашен за 4 года, то:

$$\frac{Sm^4}{m^3 + m^2 + m + 1} = 1\,464\,100, \ (1)$$

а если он будет погашен за 2 года, то:

$$\frac{Sm^2}{m+1} = 2\,674\,100. \ (2)$$

Найдём отношение левых и правых частей равенств (1) и (2). Получим:

$$\frac{m^2(m+1)}{m^3 + m^2 + m + 1} = \frac{14641}{26741} \Leftrightarrow \frac{m^2(m+1)}{m^2(m+1) + (m+1)} = \frac{121}{221} \Leftrightarrow \frac{m^2(m+1)}{(m+1)\cdot(m^2+1)} = \frac{121}{221} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{m^2+1} = \frac{121}{221} \Leftrightarrow \frac{m^2+1}{m^2} = \frac{221}{121} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{100}{121} \Leftrightarrow m^2 = 1,21 \Leftrightarrow m = 1,1.$$

Итак, $1 + 0,01r = 1 + 0,1 \Leftrightarrow 0,01r = 0,1 \Leftrightarrow r = 10$.

Ответ: 10.

Пример 2. В июле планируется взять в кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: 1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2) с февраля по июнь каждого года необходимо часть долга, равную 2,16 млн рублей. Сколько мил рублей было взято в банке если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение. В соответствии с формулой, приведённой выше:

$$\frac{S\cdot 1,2^3}{1,2^2+1,2+1}=2,16 \Leftrightarrow \frac{S\cdot 1,2^2}{1,2^2+1,2+1}=1,8 \Leftrightarrow S=\frac{180\cdot(1,2^2+1,2+1)}{12\cdot 12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{5\cdot(1,2^2+1,2+1)}{4} \Leftrightarrow S=\frac{5\cdot 3,64}{4} \Leftrightarrow S=4,55.$$

Ответ: 4,55.

Пример 3. В июле планируется взять в кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы: 1) каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года; 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга. Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за 2 года, приём в первый год было переведено 55 000 рублей, а во второй год — 69 000 рублей.

Решение. В январе следующего года после взятия кредита долг клиента составил $(100000+1000r)$ рублей. Клиент перевёл банк 55000 рублей. К концу первого года долг составил $(45000+1000r)$ рублей.

В начале второго года, после начисления процентной ставки долг стал равен $(45000+1000r)\cdot(1+0,01r)$ руб. Но эту сумму клиент погасил разовой выплатой 69 000 руб. Следовательно, $(45000+1000r)\cdot(1+0,01r)=69000$. Решим это уравнение относительно r:

$$(45000+1000r)\cdot(1+0,01r)=69000 \Leftrightarrow (4500+100r)\cdot(1+0,01r)=6900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4500+100r+45r+r^2=6900 \Leftrightarrow r^2+145r-2400=0 \Leftrightarrow$$

$$r=\frac{-145\pm\sqrt{21025+9600}}{2}= =\frac{-145\pm\sqrt{30625}}{2}=\frac{-145\pm 175}{2}.$$

Тем самым, $r_1=15$, $r_2=-160$; отрицательное решение не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 15.

Пример 4. В июле планируется взять в кредит в банке на сумму 5 005 000 рублей. Условия его возврата таковы: 1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга. На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение. Воспользуемся формулой $\Phi=\dfrac{S(1+0,01r)^n}{(1+0,01r)^{n-1}+(1+0,01r)^{n-2}+...+(1+0,01r)+1}$.

Пусть $\Phi(3)$ — фиксированный ежегодный платёж для случая, если кредит погашен за 3 года, $\Phi(2)$ — для случая, если кредит погашен за 2 года. Найдём разность:

$$\Delta\Phi=3\Phi(3)-2\Phi(2)=\frac{3\cdot 5\,005\,000\cdot 1,2^3}{1,2^2+1,2+1}-\frac{2\cdot 5\,005\,000\cdot 1,2^2}{1,2+1}=$$

$$=5\,005\,000\cdot 1,2^2\cdot\left(\frac{3,6}{3,64}-\frac{2}{2,2}\right)=50\,050\cdot 144\cdot\left(\frac{360}{364}-\frac{20}{22}\right)=50\,050\cdot 144\cdot\left(\frac{90}{91}-\frac{10}{11}\right)=$$

$$=50\,050\cdot 144\cdot\frac{990-910}{91\cdot 11}=\frac{50050}{91\cdot 11}\cdot 144\cdot 80=50\cdot 144\cdot 80=72\cdot 8\cdot 1000=576\,000.$$

Ответ: на 576 000 руб.